Die Mathematik in der Kunst und die Kunst in der Mathematik

Schnittstellen von Kunst und Mathematik mit Vorschlägen für einen fächerübergreifenden Unterricht

DIPLOMARBEIT
zur Erlangung des akademischen Grades
Magistra Artium
im Lehramtsstudium der Unterrichtsfächer
Bildnerische Erziehung und Mathematik

Eingereicht von:
Ines Amelie Brantl

Betreut von:
A.Univ.-Prof. Wolfgang Schreibelmayr
Institut für Kunst und Bildung

Eingereicht am:
19.07.2021
Approbation am:
24.01.2022
Kunstuniversität Linz

Inhaltsverzeichnis

Abstract

Diese Arbeit sucht nach einer Antwort, was Kunst und Mathematik miteinander verbindet. Dabei werden zunächst die beiden Begriffe untersucht und anschließend verschiedene Schnittstellen dieser Bereiche aufgezeigt. Darunter fallen vor allem Natur und Geometrie. Auch die Kunst des Papierfaltens – Origami – wird näher betrachtet. Besondere Bedeutung fällt dem Goldenen Schnitt zu. Dieser wird mathematisch untersucht, verschiedene Aspekte wie die Goldene Spirale oder die Fibonacci-Reihe werden erklärt sowie in Natur, Kunst und Architektur gesucht. Anschließend wird der Versuch gestartet, eine Kurvendiskussion mit einer Bildanalyse gleichzusetzen. Dazu wird eine Reihe an Fragen, die in den jeweiligen Analysen vorkommen, einander gegenübergestellt. Um die Vorgehensweise zu verdeutlichen, werden zunächst eine Kurvendiskussion und eine Bildanalyse getrennt durchgeführt und die Gemeinsamkeiten herausgearbeitet. Im Zusammenhang dieses Versuchs werden auch andere Aspekte der interdisziplinären Verwendung angesprochen. Dazu zählen die digitale Bildverarbeitung durch das Aufspalten in verschiedene Farbanteile sowie die Anwendung der Fourier-Transformation, um Filter über ein Bild zu legen. Eine weitere Verwendung findet man, indem durch geeignete Funktionsgleichungen ein Bild konstruiert werden kann. Folglich wird die Bridges-Konferenz erwähnt, welche ein jährlich stattfindendes Zusammentreffen und Austauschen von interdisziplinär-interessierten Menschen ist. Sie befasst sich mit der Verbindung von wissenschaftlichen, technischen und künstlerisch-musischen Bereichen. Dazu werden ein paar Vorträge näher vorgestellt. Schließlich wird die Anwendung der Verbindung von Mathematik und Kunst in der Schule erläutert. Zunächst wird allgemein die Frage diskutiert, ob und warum ein fächerübergreifender Unterricht sinnvoll ist. Anschließend werden fünf Unterrichtsvorschläge nach diesem Konzept erläutert.

Die vorliegende Arbeit wendet sich an Interessierte von interdisziplinärem Unterricht sowie an jene, die sich gleichermaßen mit Mathematik als auch Kunst beschäftigen.

1 Einleitung

Seit ich das Lehramtsstudium in Linz begonnen hatte, wurde ich oft gefragt, warum ich mich für die Kombination „Mathematik und Kunst“ entschieden habe. Das seien doch grundverschiedene Fächer – bekam ich oft zu hören. Meine Antwort war stets dieselbe: „Warum nicht?“ Wer es ausführlicher wissen wollte, dem bot ich die Erklärung, in der Renaissance seien die meisten Künstler auch Mathematiker, Physiker, Architekten etc. gewesen. Warum sollte ich das also nicht auch machen? Allerdings war der Vergleich mit den alten Meistern nicht ausreichend und – zugegeben – etwas gewagt. Eine ordentliche Erklärung fehlte mir. So entschloss ich mich, meine Diplomarbeit diesem Thema zu widmen. Mit dieser Arbeit möchte ich nun eine Antwort finden auf die Frage:

WAS HABEN MATHEMATIK UND KUNST MITEINANDER GEMEINSAM?

Während dem Schreiben dieser Arbeit stellte ich mir selbst ebenfalls die Frage, warum ich genau diese Kombination gewählt habe. Zum einen, da ich schon seit Beginn meiner Schulzeit ein Talent für das Handhaben von Zahlen zeigte. Meine Leidenschaft für gestalterische Prozesse entwickelte ich sogar noch früher. Sobald ich einen Stift halten konnte, wurde eine Zeichnung nach der anderen produziert. Im Laufe meiner Schulzeit feilte ich an beiden Talenten. Durch Nachhilfe für meine Mitschülerinnen und Mitschüler merkte ich, welche Freude ich im Erklären fand. Somit beschloss ich Lehrerin zu werden. Der zweite Grund für meine Wahl bestand darin, dass ich meine Zukunft nicht in nur einem einzigen Bereich wie Mathematik *oder* Kunst sehen wollte. Ich war fasziniert von den Universalgenies der Geschichte, welche sich ebenfalls nicht beschränken wollten. Mein Wunsch war es, wie Leonardo da Vinci zu sein: Künstler, Mathematiker, Forscher, Erfinder, Ingenieur, Naturphilosoph und anderes. Vor allem seine Naturstudien und mechanischen Erfindungen wie die Leonardo-Brücke prägten mich.

Die Einleitung dieser Arbeit möchte ich darum den Universalgelehrten der Vergangenheit widmen. Als solcher gilt ein Gelehrter oder eine Gelehrte mit ausgeprägten aktuellen Kenntnissen aus verschiedenen Wissensgebieten. Meist in Bezug auf Naturwissenschaften bildeten sie sich in einer Disziplin nach der anderen weiter. Die Begriffe Universal*genie* und Universal*gelehrter* unterscheiden sich geringfügig:

Universalgenie (Dudenredaktion I):	*Universalgelehrter* (Dudenredaktion II):
„auf vielen Gebieten zu genialen Leistungen befähigter Mensch, Alleskönner[in]“	„Gelehrter mit umfassenden, viele Wissensgebiete einschließenden Kenntnissen“

Ein verwandter Begriff ist der *Polyhistor* (Dudenredaktion III: „in vielen Fächern bewanderter Gelehrter“, von griech.: viel wissend). Dieser wurde in der Antike als Beinamen für einen Gelehrten vergeben. Auch der *uomo universale* („Universalmensch“) und *genius universalis* („universaler Geist“) gehören in diese Kategorie. Ersterer ist jemand, der vielseitig gebildet, aufgeschlossen sowie schöpferisch tätig ist und in Harmonie mit der Natur lebt. Der universale Geist entspricht in etwa dem Universalgelehrten. Ein Mensch, der neugierig auf die Geheimnisse der Welt ist und zugleich talentiert genug ist, diesem Wissensdrang auf erkenntnisbringende Weise nachzugehen, hat also die besten Voraussetzungen, den Zusatz „Universal-“ zu erlangen.

Seit der Antike gibt es in verschiedenen Winkeln der Welt Menschen, die mit einem der oberen Begriffe betitelt werden. Zu den bekanntesten gehören Aristoteles (Wissenschaftler, Naturphilosoph, Logiker, Biologe, Physiker, Ethiker, Dichter u.a.) und Plinius der Ältere (Historiker, Naturforscher, Enzyklopädist). Auch aus Ägypten, Asien und dem Perserreich sind bis heute Namen im kulturellen Gedächtnis verblieben. Aus dem Mittelalter sind zum Beispiel der deutsche Universalgelehrte Albertus Magnus (Theologe, Philosoph, Naturforscher) und der Schweizer Polyhistor Conrad Gessner (Arzt, Naturforscher, Altphilologe, Humanist, Enzyklopädist) zu nennen. Nur wenige Frauen haben es auf diese Weise geschafft, sich einen Namen zu machen. Die Äbtissin Hildegard von Bingen (Dichterin, Komponistin, Theologin, Naturheilkundige) kann auf jeden Fall in dieser Liste aufgeführt werden. Besonders viele Universalgelehrte und -genies gab es in der Renaissance. Neben Leonardo da Vinci gilt vor allem Albrecht Dürer (Maler, Grafiker, Mathematiker, Kunsttheoretiker) als herausragendes Genie seiner Zeit. Auch der Portugiese Duarte Pacheco Pereira (Seefahrer, Feldherr, Mathematiker, Astronom, Naturwissenschaftler, Geograph) brachte es durch sein vielseitiges Wissen zu Ruhm. Um etwa 1700 waren vor allem Gottfried Wilhelm Leibniz (Philosoph, Mathematiker, Jurist, Historiker, politischer Berater) und Isaac Newton (Mathematiker, Physiker, Naturforscher, Theologe, Alchemist, Philosoph) die bekanntesten Gelehrten. Auch hier gab es ein paar – wenn auch eher unbekannte – Frauen, wie zum Beispiel Margaret Cavendish (Physikerin, Naturphilosophin, Schriftstellerin), die sich wissenschaftlich vielseitig auseinandersetzten. Doch ab dann wurden es immer weniger Personen, die den Titel Universalgelehrte oder -gelehrter verdienten. Der Schweizer Mediziner Albrecht von Haller (Arzt, Naturforscher, Botaniker, Dichter, Wissenschaftspublizist) sowie Alexander von Humboldt (Physiker, Geologe, Mineraloge, Botaniker, Vegetationsgeograph, Zoologe, Klimatologe, Ozeanograph, Astronom u.a.) waren zwar an vielen wissenschaftlichen Bereichen interessiert und belehrt, aber ein so umfangreiches Wissen, so dass sie als Gelehrte bezeichnet werden, konnten sie nicht in allen Disziplinen aufweisen. Auch Johann Wolfgang von Goethe (Dichter, Naturforscher) ist vor allem als Schriftsteller bekannt. Dass er auch besondere Kenntnisse von menschlicher Anatomie, Botanik, Meteorologie sowie Malerei und Farbenlehre vorzuweisen hatte, wissen nur wenige. Manche behaupten, Goethe sei der letzte Universalgelehrte. Andere schreiben dies Leibniz zu. Wieder anderen Quellen zufolge könnte noch William Henry Fox Talbot (Natur- und Geisteswissenschaftler, Fotopionier) zu den Universalgelehrten gezählt werden. (vgl. überblickshaft Wikipedia 2021)

Warum gibt es heute keine Universalgelehrten mehr? Durch all die Jahrhunderte der Forschung und Wissenschaft steigt die Quantität an Wissen stetig an. Immer mehr Wissenschaftler*innen, Philosoph*innen und Künstler*innen verschreiben sich einem einzigen Fachgebiet – sie werden zu Spezialist*innen in einem einzigen Bereich. Doch selbst da ist es mittlerweile unmöglich, alles zu wissen. Die Medizin ist das beste Beispiel. Kein Arzt oder Ärztin kennt sich mit allen Leiden des menschlichen Körpers aus. Es gibt Spezialist*innen für jedes Körperteil. Und selbst dort wird noch weiter unterschieden. Es gibt Herzchirurgen, die sich nur mit den Herzklappen beschäftigen. Andere sind nur für die herznahen Blutgefäße zuständig. Heute ist man Meister auf seinem eigenen speziellen Fachgebiet. Das Wissen ist zu umfangreich geworden, als dass man selbst auf jede Frage eine Antwort wüsste. Natürlich gibt es noch Multitalente, die sich nicht auf nur ein Thema beschränken. Sie besitzen Wissen aus verschiedenen Bereichen und sind vielseitig interessiert. Doch nur selten hat ihr Wissen einen solchen Umfang, als dass sie im Sinne der antiken Definition als Universalgenie oder -gelehrte bezeichnet werden können.

Mich selbst nun mit den Universalgenies der letzten Jahrhunderte zu vergleichen oder ihre Position anzustreben, möchte ich mir nicht anmaßen. Aber ihre Einstellung, alles – oder zumindest vieles – in der Welt verstehen zu wollen und sich dementsprechend fortzubilden, möchte ich mir als Vorbild nehmen. Es ist mir wichtig, die kindliche Neugierde und den kreativen Blick auf die Umwelt zu bewahren, um ein lebenslanges Lernen zu ermöglichen. Dies ist ein Wunsch, den ich als Pädagogin den nächsten Generationen vermitteln möchte. Diese wissenschaftliche Arbeit soll den Anfang dafür darstellen. Ganz nach dem Motto von Pablo Picasso: „Als Kind ist jeder ein Künstler. Die Schwierigkeit liegt darin, als Erwachsener einer zu bleiben".

Die Arbeit beginnt mit der Überlegung, was man unter den Begriffen Kunst und Mathematik versteht und welche Teilgebiete sie umfassen. Dazu werden auch historische Theorien zur Klassifizierung vorgestellt. Anschließend werden verschiedene Bereiche genannt, an denen die beiden Disziplinen aufeinandertreffen. Angefangen mit der Natur, in der manche Phänomene berechnet werden können und die als Vorbild für viele Malereien dient, geht es weiter mit Geometrie. Sie gehört zu den *Sieben Freien Künsten* der Antike und bildet sowohl in der Mathematik als auch in der Kunst einen Grundbaustein. Bezüglich der Geometrie wird das Thema Origami besonders betrachtet. Die Papierkunst kann auch rechnerisch untersucht werden. Ein Unterkapitel ist dem Goldenen Schnitt gewidmet. Es wird aufgezeigt, welche Formen er annehmen kann und wo man ihn in der Natur, der Kunst und der Mathematik findet. Anschließend wird versucht, eine Brücke zwischen je einem Analyseschema aus Mathematik und Kunst zu bauen. Dabei wird die Kurvendiskussion der Bildanalyse gegenübergestellt. Es wird experimentell ein Gemälde mit den Fragen einer Kurvendiskussion untersucht und anschließend ein Funktionsgraph als Bild betrachtet. Das nachfolgende Kapitel befasst sich mit der Bridges-Konferenz. Dies ist ein jährlich stattfindendes internationales Event, bei dem es darum geht, auf neue und kreative Weise eine Brücke zwischen verschiedenen Formen der Kunst und Wissenschaft zu bauen. Dabei werden ein paar Vorträge der Konferenz von 2019 geschildert. Von dort aus geht es weiter mit den Überlegungen, warum eine Verbindung zwischen Mathematik und Kunst, aber auch zwischen anderen Fachrichtungen stattfinden und warum man dies im Schulunterricht einbinden sollte. Dabei soll „Kunstunterricht" alle künstlerisch-gestalterischen Fächer umfassen, wie Bildnerische Erziehung, Mediengestaltung, Kunstbetrachtung, Darstellung, Technisches Zeichnen etc. Das letzte Kapitel dieser Arbeit gibt konkrete Unterrichtsvorschläge für fächerübergreifende Projekte an. Das erste Beispiel beschäftigt sich mit der Frage, wie das räumliche Vorstellungsvermögen unterstützt werden kann.

Wenn im Mathematikunterricht das Thema Raumgeometrie behandelt wird, fehlt es oft an Anschauungsmaterial. Dafür gibt es die Möglichkeit, dreidimensionale Grundkörper aus Papier zu bauen, die flach zusammengefaltet und somit platzsparend aufbewahrt werden können. Der nächste Vorschlag behandelt den Goldenen Schnitt. Dieser soll in Naturobjekten gesucht und anschließend in Zeichenstudien festgehalten werden. Als drittes wird eine ungewöhnliche Perspektive erklärt: Die Fisheye-Perspektive entspricht einem 360°-Bild. Dabei kann ein gesamter Raum auf einer einzigen Kreisfläche festgehalten werden. Das nächste Beispiel sucht nach dem ästhetischen Aspekt der Mathematik. Dafür soll im Mathematikunterricht interessante und ansprechende Tafelbilder abfotografiert werden, die im Kunstunterricht als Grundlage für eine digitale Weiterverarbeitung dienen. Letztendlich wird das Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung auf künstlerische Weise umgesetzt. In diesem Unterrichtsvorschlag sollen Wege gefunden werden, durch die ein Kunstwerk durch berechenbare Zufälle entsteht.

Im Zuge meiner Recherche zu dieser Arbeit, stieß ich auf die Diplomarbeit „Mathematische Kunst, künstlerische Mathematik. Interdependenzen von Mathematik und Kunst“ von einer Kollegin, Lisa-Maria Kuen, die sich 2019 ebenfalls mit diesem Thema befasste. Um in keine Wiederholungen zu verlaufen, möchte ich mich in einigen Punkten auf ihre Arbeit beziehen.

2 Historischer Rückblick

2.1 Was ist Kunst, was ist Mathematik?

Bevor nach den Schnittstellen der beiden Bereiche gefragt wird, sollte geklärt werden, was man eigentlich unter Kunst und unter Mathematik versteht. Beide Bereiche können aus vielen verschiedenen Blickwinkeln betrachtet werden. Im Folgenden soll versucht werden, einen groben Überblick der verschiedenen Aspekte zu erzeugen.

2.1.1 Begriffsbildung Kunst

„KUNST = MENSCH = KREATIVITÄT = FREIHEIT“

Joseph Beuys

Definition *Kunst*:

„Bedeutung:

1.
    a. schöpferisches Gestalten aus den verschiedensten Materialien oder mit den Mitteln der Sprache, der Töne in Auseinandersetzung mit Natur und Welt

       Beispiele: die bildende Kunst, die darstellende Kunst, angewandte Kunst, abstrakte Kunst, sich der Kunst widmen, Kunst und Wissenschaft, Akademie der [schönen] Künste, ein Förderer der Künste

    b. einzelnes Werk, Gesamtheit der Werke eines Künstlers, einer Epoche o. Ä.; künstlerisches Schaffen

       Beispiele: die antike, moderne, mittelalterliche, europäische Kunst, Kunst am Bau, im öffentlichen Raum […]

2. das Können, besonderes Geschick, [erworbene] Fertigkeit auf einem bestimmten Gebiet

   Beispiele: die ärztliche Kunst, die Kunst des Lesens und Schreibens, […]

Herkunft: mittelhochdeutsch, althochdeutsch kunst, ursprünglich = Wissen(schaft), auch: Fertigkeit, zu können“ (Dudenredaktion IV)

Kunst kann zum einen als Gegensatz zur Natur betrachtet werden. Alles, was von Menschenhand erschaffen wurde, ist künstlich und somit nicht natürlich. So könnten alle Techniken, die die Naturelemente einsetzen und steuern, als Künste bezeichnet werden – beispielweise die *Wasserkunst* (Wasserversorgung, Springbrunnen), die *Feuerkunst* (Pyrotechnik, Verbrennungsanlagen) oder die *Luftkunst* (Flugzeuge, Windräder).

Da *Kunst* von *Können* abstammt, zählen auch alle Fertigkeiten und Geschicklichkeiten dazu, wie die Fechtkunst, Reitkunst, Heilkunst, Kochkunst sowie (kunst-) handwerkliche Fähigkeiten wie Töpferkunst, Webkunst und Baukunst.

Die *Schönen Künste*, wie wir sie heute kennen, wurden neben anderen von Goethe und Schiller herausgearbeitet. Zu ihnen zählen zum Beispiel die bildende und darstellende Kunst sowie Dichtung und Musik.

Im Gegensatz zu den Schönen Künsten steht die *angewandte Kunst*. Diese befasst sich mit der Gestaltung von Alltagsgegenständen. Zu ihr zählen Architektur, Grafik-, Mode- und Industriedesign, Kunstgewerbe und die dekorative Kunst.

Im Sinne der Wissenschaft sind die *Sieben Freien Künste* zu nennen. Diese sind Grammatik, Rhetorik, Logik/Dialektik, Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie. Sie bilden die Grundzüge der antiken Wissenschaft. Die Kunst spielt dabei in dem Sinn eine Rolle, dass durch sie diese Wissenschaften ausgeübt werden können. (vgl. Brockhaus 2006, S. 93-94)

In dieser Arbeit wird sich vor allem auf die bildenden Künste bezogen. Im historischen Rückblick werden auch die Bereiche des Kunsthandwerks sowie der Alltagsästhetik betrachtet, da sich anfangs noch nicht das entwickelt hatte, was wir heute als bildende Kunst bezeichnen.

Die Theorie der Kunst ist so vielfältig, dass in dieser Arbeit nicht genug Platz sein wird, um alle Ansichten unterzubringen. Es sollen darum nur zwei der ersten Theorien genannt werden: die Beschreibungen von Platon und Aristoteles. Platon unterscheidet zwei Arten von Künstlern: „Erstens solche, die schöpferisch etwas herstellen wie etwa die Baumeister, Tischler und Wagenbauer, und zweitens solche, die sich auf die Darstellung oder Nachahmung (*mímesis*) des bereits Bestehenden beschränken wie etwa die Maler, Bildhauer und Dichter“ (Hauskeller 2005, S. 11). Platons Unterscheidung zwischen *sein* und *ist* resultiert in seiner Auffassung der Wahrheit und Idee. Die erstere seiner Art von Künstlern stehen der Wahrheit näher als Maler und Co., denn sie schaffen nur ein Abbild des sichtbar Gegebenen.

> „Nur einer Kunst, die die Menschen lehrt, ihre Leidenschaften zu kontrollieren, tugendhaft zu leben und der Wahrheit nachzustreben, kommt ein gewisser Wert zu. Denn letztlich gibt es für den Menschen nur eine einzige Kunst, derer er wirklich bedarf, und das ist die Kunst des rechten Lebens, so daß alles, was nicht zum Erlernen dieser Kunst beiträgt, überflüssig oder gar verderblich ist.“ (Hauskeller 2005, S. 14)

Platons Schüler Aristoteles entwickelte eine erste systematische Literaturtheorie, die sich auf die anderen Künste übertragen lässt. Wie sein Vorgänger versteht Aristoteles die Kunst als Nachahmung, jedoch mit einer positiveren Bedeutung als Platon. Aus seiner Sicht darf ein Maler auch Dinge abbilden, die nicht der Realität entsprechen – wenn es denn der Zweck verlangt. „In der Kunst ist darum das Wahrscheinliche, auch wenn es unmöglich ist, grundsätzlich dem Möglichen, aber Unwahrscheinlichen, vorzuziehen“ (ebd. S. 17).

2.1.2 Begriffsbildung Mathematik

„ALLES IST ZAHL“

Pythagoras von Samos

Definition *Mathematik*:

„Bedeutung: Wissenschaft, Lehre von den Zahlen, Figuren, Mengen, ihren Abstraktionen, den zwischen ihnen möglichen Relationen, Verknüpfungen

Beispiele: höhere Mathematik (Mathematik, wie sie vor allem in der Hochschule betrieben wird), numerische, angewandte Mathematik (Bereich der Mathematik, der sich mit industriellen Anwendungen befasst), […]

Herkunft: lateinisch (ars) mathematica < griechisch mathēmatikḗ (téchnē), zu: máthēma = Gelerntes, Kenntnis“ (Dudenredaktion V)

Die Mathematik erscheint nicht so weitgefächert zu sein wie die Kunst. Dafür hat sie eine große Anzahl an Teilgebieten. Ihre Kerngebiete sind die Folgenden: Logik und Mengenlehre, Algebra, Analysis, Topologie, Geometrie. Weitere Gebiete und ihre Anfänge werden im Folgenden chronologisch angeführt.

Im (vor allem griechischen) Altertum begann man die Grundzüge des abstrakten Denkens zu erfassen und damit eine mathematische Sprache aufzubauen. Zu diesen grundlegenden Bereichen gehören *Arithmetik* (Rechnen mit Zahlen), *Geometrie* (Untersuchung von Figuren), *Algebra* (Auflösen von Gleichungen), *Logik* (Untersuchung von Schlussfolgerungen) und *Zahlentheorie* (Untersuchungen von Teilbarkeit und Zahlenbereichen). Man erkennt, dass dabei ein paar zu den Sieben Freien Künsten gehören: Arithmetik, Geometrie und Logik. Erst in der frühen Neuzeit kamen neue nennenswerte Bereiche dazu:

17. Jahrhundert: *Analytische Geometrie* (rechnerisches Erfassen räumlicher Beziehungen), *Wahrscheinlichkeitstheorie* (Rechnen mit Zufallszahlen und Wahrscheinlichkeiten), *Analysis* (Untersuchung von Funktionen).

18. und 19. Jahrhundert: *Differentialgleichungen* (Beschreibung physikalischer Felder), *Differentialgeometrie* (Geometrie gekrümmter Flächen und Räume), *Funktionentheorie* (Analysis mit komplexen Zahlen), *Gruppentheorie* (Systeme von Symmetrien).

20. Jahrhundert: *Mengenlehre* (Untersuchung von zusammenhängenden Objekten), *Topologie* (stetige Verformung geometrischer Körper), *Statistik* (Erhebung und Auswertung von Daten), *Numerik* (Fehleranalyse bei Algorithmen).

Manche dieser Bereiche hängen eng mit der Philosophie (wie Logik) oder der Informatik (wie Numerik) zusammen. Mathematik kann hier als zu Grunde gelegte Sprache verstanden werden. „Mathematik ist das Alphabet, mit dessen Hilfe Gott das Universum beschrieben hat“, wie Galileo Galilei es einst erklärte. Sie gilt selbst nicht als Naturwissenschaft, stellt aber eine Hilfswissenschaft für andere Wissenschaften wie Physik dar. Manche zählen sie zu den Geisteswissenschaften oder der Philosophie.

Für diese Arbeit sind vor allem die Bereiche Geometrie und Analysis relevant. Als Unterrichtsbeispiel im letzten Kapitel bekommt auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung Aufmerksamkeit.

„Alles ist Zahl“ – dies ist ein berühmter Ausdruck, der dem griechischen – umstrittenen und von Mythen umgebenen – Mathematiker und Philosophen Pythagoras von Samos (6. Jhd. v. Chr.) zugeschrieben wird. In der von ihm gegründeten religionsphilosophischen Schule befassten sich die sogenannten Pythagoräer vor allem mit Musik und Mathematik. Diese Schule überdauerte mehr als 1000 Jahre und viele ihrer Ansätze sind auch heute noch populär. Laut Aristoteles glaubten sie, die Natur sei auf Zahlen und Proportionen aufgebaut. Diesen und den geometrischen Figuren schrieben sie geheimnisvolle Kräfte zu. Die Pythagoräer waren wahrscheinlich „der Überzeugung, dass Zahlen und Formen außerhalb der Welt eine eigene Existenz besäßen, und so entwickelten sie eine ausgefeilte Kosmologie, in der manche von ihnen mit Göttern gleichgesetzt wurden“ (Wade 2017, S. 10). Die pythagoräischen Lehren, festgehalten in einem Brief von Platon, wurden unterschieden zwischen „dem Körperlichen, das wandelbar und vergänglich ist, und dem Ewigen, das aus reinen, unvergänglichen Ideen besteht“ (ebd. S. 10f). Dazu werden die vier Elemente und der Kosmos den platonischen Körpern zugeordnet: Erde = Würfel, Luft = Oktaeder, Feuer = Tetraeder, Wasser = Ikosaeder und Kosmos = Dodekaeder (vgl. ebd.).

2.2 Historische Entwicklung – Meilensteine

Die getrennten historischen Entwicklungen von Mathematik und Kunst sind so umfangreich, dass es endlos viele Bücher dazu gibt. Im Rahmen dieser Arbeit sollen somit nur wenige, für dieses Thema relevante Meilensteine von den Anfängen bis hin zur Renaissance genannt werden.

Die Anfänge

Die Kunst findet ihren Anfang bekanntlich in der Steinzeit. Die Kreativität selbst begann schon sehr früh. Sie wurde gebraucht, um aus Objekten der Natur Hilfsmittel und Werkzeuge zu gestalten. Dies begann vor mehr als 3 Millionen Jahren. Im Laufe der Zeit entwickelte sich die Kreativität weiter. „Als die Kreativität in Afrika vor 90 000 bis 60 000 Jahren und in Europa vor rund 40 000 Jahren explodierte, muss sie schon lange im Menschen gegärt haben“ (Pringle 2013, S. 25). Durch den kulturellen Austausch und die sozialen Vernetzungen, wurden die Kulturentwicklungen vorangetrieben. Die beeindruckenden Höhlenmalereien (37 000 bis 41 000 Jahre alt) faszinieren

Menschen bis heute. Auch die ersten Skulpturen wie die Venus von Willendorf (etwa 30 000 Jahre alt) und gefundene Musikinstrumente deuten auf ein ästhetisches Verständnis hin. Die Mathematik – oder genauer gesagt das Verständnis des Zählens – begann auch schon vor etwa 20 000 Jahren. Fundstücke von Kerben und Ritzungen auf Knochen, Steinen und Tongefäßen geben darauf Hinweise. „Erst der Übergang zur Sesshaftigkeit führte zum eigentlichen Vorgang des Zählens und dann auch des Rechnens“ (Wußing 2008, S. 6). Der beginnende Handel und Warenaustausch verlangten die Notwendigkeit von Zahlen. Die Anfänge der Mathematik selbst entwickelten sich aber erst um etwa 4000 v. Chr. in den Hochkulturen an großen Flüssen und Strömen in China, Indien, Ägypten und Mesopotamien (vgl. ebd.). Etwa zur gleichen Zeit begannen die Menschen des heutigen Mitteleuropas die Geometrie für ihren Alltag zu nutzen. So wurden Tongefäße mit geometrischen Ornamenten verziert, was Funde belegen (Wußing 2008, S. 12f). Damit sind sie so alt wie die ägyptischen Hieroglyphen. Auch begannen die Menschen mithilfe einer geometrischen Grundvorstellung sowohl einfache als auch die ersten großen Bauwerke zu konstruieren. Damit errichteten sie zum Beispiel Kreisgrabenanlagen zur Bestimmung der Jahreszeiten und für astronomische Zwecke. „Die Beobachtung des Sternenhimmels schuf irgendeine Form räumlichen Denkens“ (ebd.). Die sogenannte Himmelsscheibe von Nebra lässt erkennen, wie genau die Beobachtungen der damaligen Astronomen (wenn man sie so nennen darf) waren, denn mit ihr sind exakt die Positionen der Sonne zu den verschiedenen Sonnenwenden markiert. Die mit diesen Beobachtungen verbundenen Rituale und Kulten könnten auch als eine Art Kunst angesehen werden. Zwar hatten sie keinen unmittelbaren Nutzen für die Lebenserhaltung, aber die dafür geschaffenen Kleidungen, Schmuck und Ornamente genauso wie Waffen zeigten die Zugehörigkeit zu einem bestimmten Stamm. Man könnte also zusammenfassend die Kunst als Kult bezeichnen.

Die Antike

Erst ab der Antike bildete sich das gestalterische Schaffen als eigenständiges Handwerk aus. Aus dem alten Ägypten, Griechenland und römischen Reich stammen einige der heute berühmtesten Zeugnisse künstlerischen Schaffens wie Plastiken, Wandmalereien und -mosaike oder Bauwerke. Auch die Mathematik hat hier einen großen Schritt nach vorne gemacht. Doch bevor dieses Thema ausführlicher behandelt wird, soll ein internationaler Blick der Ethnomathematik gewagt werden. In anderen Ländern und auf anderen Kontinenten entwickelte sich die Mathematik ebenfalls weiter und mit ihr die Geometrie und Architektur. In Süd- und Zentralafrika verwendeten die Mitglieder der Bantu-Völker Zeichnungen im Sand, um Geschichten und Erzählungen zu untermalen – die sogenannten *sona*. Dabei werden Punkte einer Art Koordinatensystems im Sand markiert und anschließend bestimmte zusammenhängende Linien um die Punkte gezeichnet. Die Muster folgen einem geometrischen Algorithmus (vgl. Wußing 2008, S. 20ff., Krause 1998, S. 118). In den präkolumbianischen Kulturen der Maya, Inka und Azteken wurden im 2. bis 8. Jahrhundert n. Chr. die bekannten treppenstufigen Pyramiden errichtet, lediglich mit Hilfsmitteln wie Senkblei, Keil, Zirkel und menschlicher Körperkraft, aber ohne Rad. Und dabei haben die Azteken nicht einmal eine ausgebildete Schrift verwendet (vgl. Wußing 2008, S. 25). Darüber hinaus entwickelte sich die Kalenderrechnung. Die Azteken und Maya verwendeten dazu ein Stellenwertsystem zur Basis 20, das heißt jeder ihrer 18 Monate hatte 20 Tage plus fünf weitere nichtzugeordnete Tage. Die Städte der Maya wurden auf geometrisch berechneten Grundrissen errichtet. Das Zahlensystem der Maya bestand aus Strichen und Punkten in einer festgelegten, wenn auch nicht einheitlichen, Reihenfolge (ebd. S. 30f).

Zurück nach Europa: Hier etablierten sich die Sieben freien Künste (*septem artes liberales*), welche Grundlage für das damalige Schulsystem für freie Männer stellten (mehr dazu bei Kuen 2019, S. 66-68). Dies ist wohl das erste aktive Zusammentreffen von Mathematik und Kunst, obwohl von der Kunst nur die Musik in den freien Künsten Anklang fand. Die Geometrie fand in dieser Zeit ihre Blüte. Mit Euklids Buch der *Elemente* war das erste Lehr- und Sammelwerk (bestehend aus 13 Bänden) zur Geometrie und Arithmetik geschaffen. In der römischen Antike schritt zwar die Mathematik nicht so stark voran wie in Griechenland, dafür entwickelten sich unter anderem die Kunst (vor allem Theater und Wandmosaike) und Architektur weiter. Zum Beispiel für den Bau des Pantheons in Rom (2. Jhd. n. Chr.) mit seiner beeindruckenden Kuppel samt Opaion[1], waren umfangreiche Berechnungen nötig (Wußing 2008, S. 210). Die Wandmalereien und -mosaike zeigen die erstaunlichen

[1] Ein Loch von 9 Metern Durchmesser, welches zur Belüftung und Beleuchtung diente und als Kontakt zum Himmel und den Göttern galt.

Fähigkeiten hellenistischer Künstler bezüglich Naturalismus und Perspektive (vgl. Beckett 2005, S. 19-21).

Das Mittelalter

Mit dem Zusammenbruch des römischen Reichs ging viel Wissen verloren. In der Kunst litten vor allem die Darstellungen von menschlichen Proportionen und Perspektiven darunter. Diese wurden erst im Laufe der Zeit wieder angeeignet. Dafür aber entstanden im frühen Mittelalter „die Voraussetzungen für die wissenschaftlichen und technischen Neuerungen der Zukunft wie beispielsweise der Erfindung der Druckerkunst“ (Beckett 2005, S. 28). Auch gehen die Gründungen einiger Universitäten und Klosterschulen auf das Mittelalter zurück. Durch Handelsbeziehungen und Kreuzzüge in den Orient wurde internationales Wissen zusammengetragen. Leonardo da Pisa – auch bekannt als Fibonacci – profitierte von diesem Wissen, vor allem von der islamischen Denkweise zur Algebra (vgl. Wußing 2010, S. 15f). Um 1200 verfasste er einige Bücher zur Arithmetik. Darunter ist auch das Kaninchenproblem zu finden, welches auf die Fibonacci-Zahlen führt (mehr dazu in Kapitel 3.3.1). Auch geht auf ihn die Klassifizierung der negativen Zahlen zurück.

Die Renaissance

„Wiedergeburt der Antike“ – so wird die Renaissance genannt. Sie ist für die gewaltige Entfaltung von Kunst und Wissenschaft bekannt. Einige der weltberühmtesten künstlerischen Werke wie die *Mona Lisa* stammen aus dieser Zeit. Erst ab dieser Zeit sprach man wirklich von einem „Künstler“. Diese waren angesehen und weit über ihre Regionen hinaus bekannt. Viele von ihnen waren jedoch nicht nur für ihr künstlerisches Schaffen bekannt. In der Renaissance gab es eine Vielzahl an Universalgelehrten. Darunter Leonardo da Vinci und Albrecht Dürer, die sich ebenso mit der Mathematik auseinandersetzten.

Der neu erfundene Buchdruck machte es möglich, mathematische Texte der Antike der Öffentlichkeit (oder zumindest der griechisch-lateinisch-sprechenden Bevölkerung) zugänglich zu machen (vgl. Wußing 2010, S. 11). Die meisten mathematisch Bewanderten des Alltags waren die Rechenmeister. Ihre Aufgabe bestand hauptsächlich in der Umrechnung von Währungs- und Längenmaßen, wie die der verschiedenen Ellenlängen. Zu dieser Zeit wurden die heute verwendeten indisch-arabischen Ziffern anerkannt – wenn auch mit viel Gegenspruch (vgl. ebd. S. 21f). Die Renaissance brachte viele Mathematiker hervor, deren Schreibweisen und Ausdrücke wir noch heute benutzen. Wie zum Beispiel die Symbole + und – sowie = (von Robert Recorde) oder die Zahlwörter Billion, Trillion und Quadrillion (von Nicolas Chuquet). Viele der Mathematiker waren auch in anderen wissenschaftlichen Bereichen tätig. Daneben brachten sie der einfachen Bevölkerung Schreiben, Lesen und Rechnen bei, was zur Veröffentlichung vieler Lehrbücher führte, wie zum Beispiel von Adam Ries (vgl. ebd. S. 23-25). In der Architektur wurde mit dem Wunsch immer größer und mächtiger zu bauen (wie Kuppelkonstruktionen und Festungen), auch die darstellende Geometrie vorangetrieben. Die Mathematik spielte nun auch in der bildenden Kunst eine Rolle. „Repräsentative Gebäude, Bildwerke, Statuen und Gemälde mussten, sollten sie dem wiederbelebten antiken Schönheitsideal genügen, nach *kanonischen Regeln* komponiert sein: Ihre Teile hatten in bestimmten Größenverhältnissen zu stehen“ (Wußing 2008, S. 309). Dazu gehören der Goldene Schnitt und die Fluchtpunktperspektive.

> Die Einzigartigkeit des Platonismus „beruht zum Teil auf der Vorstellung, die Natur ließe sich am besten durch Zahlen und Vermessen begreifen – eine Voraussetzung jeder Wissenschaft. Aber diese Überzeugungen, die der idealisierenden Bewertung von Zahlen, Proportionen und geometrischer Form einen hohen Wert beimaßen, schlugen sich auch in der künstlerischen Ausdrucksweise nieder. Genau dieser Aspekt des Platonismus wurde mit Beginn der Renaissance eine Inspirationsquelle der Künstler – und hierbei besonders die pythagoräische Auffassung von Verhältnis und harmonischer Relation, die die Welt im Innersten bestimmen, zugleich aber auch über sie hinaus verweisen.“ (Wade 2017, S. 6)

3 Gemeinsame Bereiche von Mathematik und Kunst

3.1 Mathematik und Kunst in der Natur

Die Kunst ist von der Natur inspiriert und die Mathematik kann manche Eigenschaften der Natur beschreiben. „In mittleren Zeiten war die Mathematik das vorzüglichste unter den Organen, durch welche man sich der Geheimnisse der Natur zu bemächtigen hoffte; und noch ist in gewissen Teilen der Naturlehre die Meßkunst, wie billig, herrschend“ (Goethe 1810, S. 167). So sind viele geometrische Grundkörper in manchen natürlichen Rohstoffen zu erkennen, beispielsweise im Mineral Pyrit. Dieser Kristall – auch Katzengold genannt – kann in mehr oder weniger perfekter Würfelform natürlich vorkommen (Abb. 1). Auch Oktaeder, Pentagondodekaeder und andere Polyederformen sowie Kombinationen dieser sind keine Seltenheit. Man könnte meinen, die Natur habe einen Sinn für Ästhetik.

Abb. 1: Pyritkristall

Auch andere Objekte können in geometrische Grundkörper zerlegt werden. Zum Beispiel kann ein Baum als reduzierte Darstellung als Kombination von Zylindern gesehen werden. Die reduzierte Darstellung kann als Konstruktionsgerüst oder

Hilfestellung für eine Zeichnung jenes Baums verwendet werden. Also übersetzt die Mathematik die Natur in einfache Bausteine, die wiederrum in der Kunst weiterverwendet werden können. Man findet noch weitere mathematische Sachverhalte in der Natur, die an dieser Stelle nur erwähnt werden sollen: Symmetrie in Lebewesen und Pflanzen, Parabelformen in der Flugbahn eines springenden Funkens oder regelmäßige Vielecke in Bienenwaben.

Ein beliebtes Beispiel der Mathematik in der Natur ist der Goldene Schnitt. Man findet ihn beinah überall. Von den Adern eines Efeublattes, über Windungen einer Ananas, bis hin zu den Verhältnissen von Körperteilen. Es gibt unzählige „goldene Verhältnisse“ am menschlichen Körper zu entdecken – zumindest näherungsweise. Dieses Verhältnis gilt als Perfektion und Schönheitsideal. Darum bauen gerade in der Renaissance viele Bilder und Plastiken auf dieser Erkenntnis auf. Auf weitere Ausführungen zum Goldenen Schnitt wird im kommenden Kapitel eingegangen.

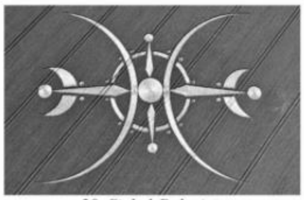
Ob Kornkreise nun auf „(über)natürliche Weise“ entstehen oder durch Menschenhand erschaffen werden, soll an dieser Stelle nicht erörtert werden. Aber unabhängig von dieser Frage muss man zugeben, dass diese riesigen Muster eine faszinierende Geometrie beherbergen. Steht man direkt in einem dieser Getreidefelder, hat man keine Chance das Muster vom Boden aus zu erahnen. Erst aus der Luft kann man perfekte Kreise, Symmetrien, Fraktale, Parkettierungen, Ornamente und andere Zusammenhänge erkennen (vgl. Abb. 2).

14. polare Struktur (Wiltshire, England, 2010)

Seite 23

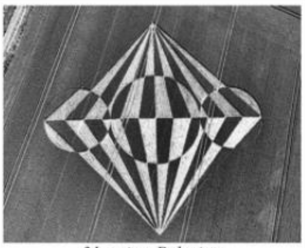
24. komplexe polare Struktur (Südkorea, 2008)

Seite 29



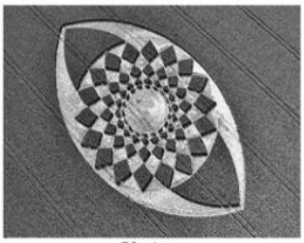
28. Sichel-Polarität (Wiltshire, England, 2015)

Seite 31



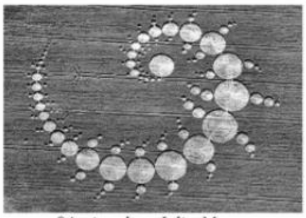
31. spitze Polarität
(Wiltshire, England, 2008)

Seite 32



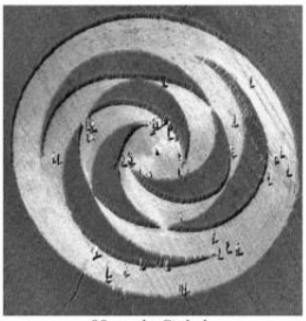
73. Auge
(Wiltshire, England, 2005)

Seite 66



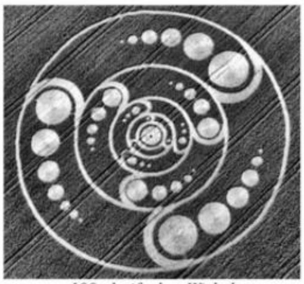
84. einpolare Julia-Menge
(Wiltshire, England, 1996)

Seite 75



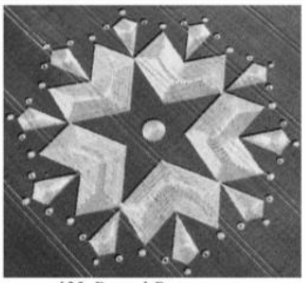
99. sechs Sicheln
(Schweiz, 2007)

Seite 86



100. dreifacher Wirbel
(Wiltshire, England, 2001)

Seite 87



125. Doppel-Pentagramm
(Wiltshire, England, 2020)

Seite 102

Abb. 2: Verschiedene geometrische Strukturen in Kornkreisen

Manche Menschen versuchen zusammen mit der Natur ein Kunstwerk zu erschaffen. Viele Landart-Projekte sind dadurch entstanden. Einige können auch mathematisch analysiert werden. Wie zum Beispiel der *Tree Mountain* in Finnland. 11 000 Bäume wurden hier unter der Anleitung der Konzeptionskünstlerin Agnes Denes auf einem künstlich angelegten Berg gepflanzt. Das Muster, in dem die Bäume stehen, basiert auf dem goldenen Schnitt. (vgl. Ferro 2018)

Die Natur galt stets als Vorbild für die Kunst. So versuchten schon viele Künstlerinnen und Künstler die Essenz einer Landschaft auf ihren Leinwänden festzuhalten oder vertieften sich in Naturstudien (wie Leonardo da Vinci). Die Natur selbst könnte aber auch als eigenständiges Kunstwerk angesehen werden. Solche Farbenpracht, Räumlichkeit und Details vermag kein*e menschliche*r Künstler*in zu erschaffen. „Es ist nicht die Aufgabe der Kunst, die Natur zu kopieren, sondern sie auszudrücken!“ (Honoré de Balzac 1831, zit. n. Schefter 2021)

3.2 Geometrie

Es ist auffällig, wie oft im gleichzeitigen Bezug auf Kunst und Mathematik die Geometrie eine Rolle spielt. Sie erscheint also als bedeutende Schnittstelle zwischen diesen beiden Disziplinen. Nicht nur, dass Geometrie Teil der Mathematik in allen Lehrplänen ist und in der Kunst oft als Grundlage für Konstruktionszeichnungen (wie beim technischen Zeichnen) gebraucht wird, so gibt es noch weitere erwähnenswerte Aspekte, die an beide Bereiche grenzen.

3.2.1 Geometrische Körper in der Kunst

Die platonischen Körper sowie andere geometrischen Polyeder haben viele Künstlerinnen und Künstler fasziniert und wurden somit in ihre Werke aufgenommen. In Deutschland gab es eine kurze Phase in der Renaissance, in der manche Werke auf geometrischer Kreativität aufgebaut waren. Diese wurden unter anderem von heute eher unbekannten Künstlern geschaffen. Auch wurden einige Bücher dazu verfasst: „Obgleich ihre Bücher einen didaktischen Zweck verfolgten – nämlich die Demonstration von Methoden der Geometrie und Perspektive –, gibt es nirgends konkrete Anstrengungen, tatsächlich entsprechende Theorien zu entwickeln“ (Wade 2017, S. 142). Ihre Zeichnungen sollten als Beispiele ausreichen. Zu jenen Künstlern zählen Wenzel Jamnitzer, Lorenz Stöer und Johannes Lencker. Ihre Zeichnungen, Aquarelle und Drucke beinhalten detailreiche Darstellungen von Polyedern und ihren Varianten. Verschachtelungen und korrekte perspektivische Verkürzungen lassen sie besonders räumlich erscheinen (mehr dazu vgl. Wade 2017). Besonders berühmt aus dieser Zeit ist Albrecht Dürers *Melencolia I* (Abb. 3). In diesem Kupferstich sind viele Hinweise auf Mathematik und andere Wissenschaften versteckt. Es gibt viele umstrittene Theorien über die dargestellten Allegorien. Der große Polyeder in der linken Bildhälfte wird meist als Rhomboederstumpf oder abgestumpfter Hexaeder verstanden. Ebenso verweisen eine Kugel, ein Zirkel in der Hand der dargestellten Frauenfigur und ein magisches Quadrat[2] im Hintergrund auf die Mathematik. Des Weiteren gibt es Werkzeuge und Messinstrumente verschiedener Handwerke und Wissenschaften. Theorien zum Hintergrund der Erschaffung des Stichs gibt es viele. Bekannt sind unter anderem jene von dem Briten Patrick Doorly und dem US-Amerikaner Erwin Panofsky. Doch

[2] Ein Quadrat mit einem Raster, in dessen Felder Zahlen stehen. Die Summe jeder Reihe, Spalte, Diagonale und der Ecken ergibt jeweils die gleiche Zahl.

Interpretationen können nicht bestätigt werden. „Kein großer Künstler bleibt davon verschont, daß seine Werke willkürlich interpretiert werden, daß ihnen Bedeutungen zugesprochen werden, die nicht im mindesten in der Absicht des Künstlers lagen, eher seinen Absichten diametral entgegengesetzt sind“ (Ernst 2007, S. 18). Wir werden die Wahrheit hinter diesem Werk vielleicht nie erfahren. Was aber sicher ist, ist das Interesse Dürers an der Geometrie. Sowohl von Dürer als auch von da Vinci gibt es viele Skizzen und Zeichenstudien von Polygonen und Polyedern. Sie dokumentieren Details der geometrischen Objekte und ihrer polygonalen Netze. Dürer verfasste dazu sein Buch *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt*.

Abb. 3: Melencolia I, Albrecht Dürer 1514

Ein modernerer Künstler, welcher Geometrie und Perspektive in seine Werke einband, ist Maurits Cornelis Escher. Auch wenn er seinerzeit nicht als Künstler anerkannt wurde, zeigten trotzdem Mathematiker, Kristallographen und Physiker gleichermaßen Interesse an seinen faszinierenden und nicht einzuordnenden Werken (vgl. Ernst 2007, S. 18). Diese beinhalten unter anderem unmögliche Welten und Gebäude, optische Täuschungen, Metamorphosen, Parkettierungen geometrischer Tiere, perfekt gezeichneter Spiegelungen auf runden Oberflächen und verschachtelte Polyeder. Sein Wissen über Perspektive ist in vielen Vorstudien erkennbar. Escher setzte sich auch mit der hyperbolischen Geometrie (im Gegensatz zur eher bekannten euklidischen Geometrie) auseinander, bei der „durch jeden gegebenen Punkt außerhalb einer Linie genau zwei Linien parallel zu dieser Linie laufen" (Ernst 2007, S. 112). Dabei sind seine Werke der Holzschnittreihe *Kreislimit* entstanden. Er orientierte sich dabei an einer Abbildung des Mathematikprofessors H.S.M. Coxeter (vgl. ebd.).

3.2.2 Perspektive und Fraktale

Ein sehr passendes Beispiel ist die Linearperspektive. Das mathematisch korrekte Zeichnen von Räumlichkeit ist seit der Renaissance ein wichtiges Stilelement in vielen malerischen Werken. Lisa Maria Kuen hat sich dazu ausführlich in ihrer Diplomarbeit gewidmet (vgl. S. 26-35). Darum wird das an dieser Stelle nicht mehr getan. Genauso die Fraktale Kunst (vgl. S. 51-62) sowie die Konkrete Kunst (vgl. S. 36-40), die einem mathematischen Prinzip folgen, sind in der besagten Arbeit untersucht und beschrieben worden.

3.2.3 Architektur und Gärten

Dieses Thema ist so umfangreich, dass allein damit eine Abschlussarbeit gefüllt werden könnte. An dieser Stelle sollen nur wenige Punkte angeschnitten werden. Geometrische Formen findet man vor allem in barocken Schlossgärten. Das Schloss von Versailles oder Schloss Schönbrunn sind dafür gute Beispiele. In den Grundrissen erkennt man, welche Berechnungen hinter den Konstruktionen stecken. Diese sogenannten formalen Gärten erfordern ein gewisses Maß an geometrischem Verständnis:

> „Die Verbindungen zwischen Gärten und mathematischen Wissenschaften beschränken sich nicht allein auf die Geometrie oder die Arithmetik, die in Gartenanlagen zu finden sein kann. Bei der Neuanlage eines Gartens gibt es

> zahlreiche Aspekte aus dem Bereich der mathematischen Wissenschaften zu beachten: die Raumaufteilung erfordert Kenntnisse der Geometrie, denn das Gelände muss vermessen und nach Maßgabe des Entwurfs bearbeitet werden; Kenntnisse der Architektur sind unerläßlich für die Ausstattung eines Gartens (man denke an Orangerien, Pavillons, etc.); die Lehre der Perspektive ist in frühneuzeitlichen Gärten unverzichtbar.“ (Remmert 2008, S. 59)

Auch die Architektur ist eine Mischung aus Mathematik und Kunst. Natürlich braucht man die Mathematik, um die statischen Berechnungen hinter den Konstruktionen durchzuführen. Und die Kunst ist in dem Sinne vertreten, wenn man die Ausführungen als Kunsthandwerk betrachtet. Aber man findet sie auch im Design. Gerade in Gebäuden, welche von Künstlern gestaltet wurden, wird die Verbindung stärker gefordert. Je mehr die Kunst in das Design eingebunden ist, desto mehr wird die Mathematik gefordert, um die Ausführung möglich zu machen. Beispiele wären Bauwerke von Friedensreich Hundertwasser (z.B. Hundertwasserhaus) und Antoni Gaudí (z.B. Sagrada Família). Aber auch in der Renaissance sind viele Gebäude von Künstlern konstruiert worden. Ein berühmtes Beispiel ist die Kathedrale Santa Maria del Fiore in Florenz, die von dem Bildhauer Brunelleschi entworfen wurde.

Ein anderer Versuch, die Mathematik in die Architektur zu bringen, stammt von Le Corbusier. Der Maler entwickelte eine Figur – den *Modulor* – welche als Orientierung für die Größenverhältnisse in Raumaufteilung oder Möbeldesign dienen sollte. Diese Figur basiert auf den Proportionen eines Menschen, die wiederum berechnet wurden (auch der Goldene Schnitt spielt dabei eine Rolle). Die Idee ist an den vitruvianischen Menschen angelehnt.

3.2.4 Farbräume

Ein sehr zentrales Thema in gestalterischen Disziplinen ist die Farbenlehre. Darunter fallen Anordnung, Mischungen, Kontraste und Wirkungen. Doch nicht nur Künstlerinnen und Künstler beschäftigen sich mit diesem Thema. Eine umfangsreiche Farbenlehre stammt von dem Schriftsteller Johann Wolfgang von Goethe. In seinem Buch erwähnte er auch das Verhältnis zwischen Farbenlehre und Mathematik. Doch da Goethe beim Verfassen nicht die Gelegenheit hatte, mit einem Mathematiker zusammenzuarbeiten, und auch selbst wenig von Mathematik verstand, werden keine konkreten Aspekte genannt. „Der Verfasser des Gegenwärtigen [gemeint ist Goethe selbst] hat die Farbenlehre durchaus von der Mathematik entfernt zu halten gesucht, ob sich gleich gewisse Punkte deutlich genug ergeben, wo die Beihülfe der Meßkunst wünschenswert sein würde“ (Goethe 1810, S.168). Er empfiehlt den Mathematikern „selbst aufzusuchen, wo denn die Farbenlehre seiner Hülfe bedarf, und wie er zur Vollendung dieses Teils der Naturwissenschaft das Seinige beitragen kann“ (ebd.).

Es gibt verschiedene Versuche, die Farben und ihre Mischungen sinnvoll anzuordnen. Dafür werden gerne geometrische Flächen wie Kreis(-ring), Quadrat und Dreieck oder ihre dreidimensionalen Pendants wie Kugel, Würfel und Pyramide genutzt. Eine der neuesten Darstellungen stammt von Harald Küppers, welcher die Farben in einem Rhomboeder einordnete (vgl. Küppers 2016). Als digitale Variante findet sich oft der Farbwürfel. Er veranschaulicht besonders gut den RGB- beziehungsweise den CMY-Farbraum. Dabei ist jede Ecke in einer reinen Farbe gehalten, der Raum dazwischen weist die Übergänge und Mischungen auf. Einander gegenüberliegende Ecken sind in den jeweiligen Komplementärfarben gehalten. Der Würfel kann in ein dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem eingesetzt werden. Wird das RGB-System betrachtet, liegt meist die schwarze Ecke im Koordinatenursprung, bei CMY ist es Weiß (vgl. Nischwitz, Fischer & Haberäcker 2007, S. 365).

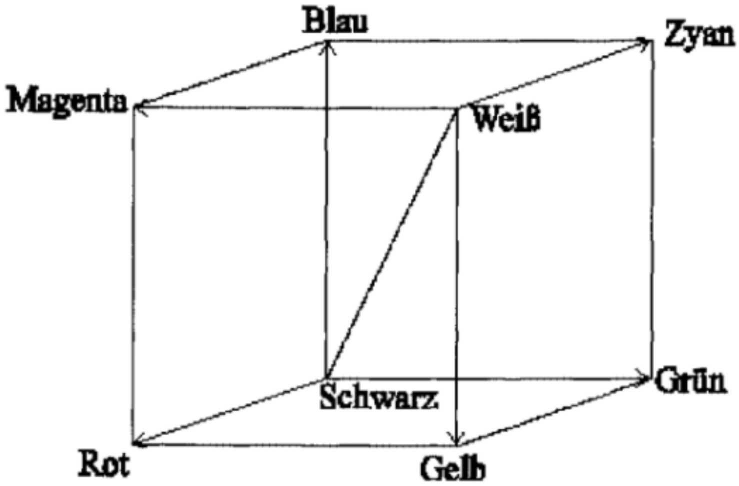


Abb. 4: RGB-Würfel

Hat der Würfel die Kantenlänge 1 und die Farbteile einen Wert zwischen 0 und 1 (also zwischen 0% und 100%), so können folgende Gleichungen aufgestellt werden (ebd.):

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C \\ M \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

Je nachdem, wie genau oder flüssig die Mischungen dargestellt werden sollen, kann die Anzahl der Zwischenschritte zwischen 0 und 1 variiert werden. Das heißt, wenn jede Würfelkante in 10 Schritten unterteilt wird und somit 10 Farbmischungen hat, so besteht der gesamte Würfel aus 10·10·10=1000 Farbvarianten. Bei 100 Schritten sind es bereits 1 Millionen Kombinationen. Für die meisten Computerprogramme ist eine Aufteilung in 255 Schritten üblich. Man könnte diese einzelnen Kombinationen als Voxel definieren (ähnlich wie Pixel, nur im dreidimensionalen Raum) und diesen somit Koordinaten oder genauer gesagt Tripel (eine geordnete Menge mit drei Elementen) zuordnen, zum Beispiel $T(R, G, B)$, wobei der erste Wert den Farbanteil von Rot, der zweite von Grün und der dritte von Blau angibt. Das Tripel $T(0,0,0)$ beschreibt im RGB-Würfel die Farbe Schwarz, $T(1,1,1)$ ist dann Weiß. $T(1,0,0)$ ergibt das reine Rot. Der Punkt $T(0.5,0.5,0.5)$ sitzt genau im Zentrum des Würfels. Je mehr Tripel es gibt, desto flüssiger wirkt der Übergang zwischen den Grundfarben.

3.2.5 Origami

Faltungen sind keine Erfindung der Menschen. In der Natur wird die Faltung in verschiedenen Varianten genutzt: „optimiertes Leichtbauprinzip für immobile, tragende Strukturen als auch für wandelbare oder flexible Konstruktionen“ (Hoffmann & Trautz 2012, S. 8). Käfer wie der Marienkäfer falten ihre Flügel nach dem Flug, um sie unter ihren Deckschalen zu verstauen; Bäume wie die Hainbuche bilden ihre Blätter in einem gefalteten Zustand aus; Schildkrötenpanzer weisen eine Facetten- beziehungsweise Punktfaltung auf; Palmblätter sind aufgrund der Faltung in Längsrichtung stabil und gleichzeitig nachgiebig gegenüber dem Wind – um nur wenige Beispiele zu nennen. Die Menschen haben Falttechniken in ihren Alltag aufgenommen, wie die Faltenbälge von Zügen und Bussen oder in der Bauweise von Faltkartons. In der Bautechnik wird das Prinzip genutzt für beispielsweise Wellbleche, Cabriodächer und mittlerweile auch faltbare Häuser und in der Medizin findet man das Prinzip in Stents (vgl. ebd.). In Design und Architektur finden verschiedene Falttechniken ebenfalls Anwendung, da sie zugleich stabil, flexibel und platzsparend sind. Selbst in der Mode kommen sie zur Geltung. Wie beispielsweise das Origami-Kleid von Lisa Klingersberger, welches sie im Zuge ihrer Bachelorarbeit 2014 an der Kunstuniversität Linz entwickelte (vgl. Klingersberger 2014). Die Firma *Petit Pli* nutzt das Prinzip der Faltbarkeit in ihren Kleidungsstücken für Kinder, um einem globalen Problem entgegenzuwirken: Kinder wachsen schnell und brauchen dementsprechend regelmäßig neue größere Kleidung. Dabei entsteht jedoch viel Textilabfall. *Petit Pli* hat Kleidung entwickelt, welche mit den Kindern mitwachsen kann. Zu Beginn ist der Stoff so gefaltet, dass die Oberfläche minimal ist. Dank der Faltung kann der Stoff auseinanderausgezogen werden, sodass die Kleidung vergrößert wird (vgl. Petit Pli 2021).

Besonders umfangreich ist das Thema der Papierfaltung. Dabei sind Papierschiff und Kranich bekannte Modelle. Diese aus Japan stammende alte Tradition (bereits ca. 100 v. Chr. wurden neben Papiere auch Stoffe gefaltet) entwickelte sich im Laufe der Zeit zu einer eigenständigen Kunst. Die Kunst des Faltens – Origami (von *oru* für falten und *kami* für Papier) wurde von Akira Yoshizawa im 20. Jahrhundert modernisiert. Er entwickelte über 50 000 Modelle sowie Faltanleitungen, welche im nach ihm benannten Yoshizawa-Randlett-System (ein einheitliches Notationssystem der Faltschritte) grafisch dargestellt sind. Außerdem entwickelte er das Nassfalten (das Papier wird angefeuchtet), wodurch auch runde und plastische Formen möglich wurden. Unter den westlichen Origami-Meistern findet sich der US-Amerikaner Robert J. Lang. Für seine gefalteten Modelle – meist Tiere – verwendet er unter anderem das eigens entwickelte Computerprogramm *TreeMaker* (vgl. Lang 2015a). Lang gilt als Pionier bei der Verbindung von Origami und Mathematik.

Dass Origami eine Verbindung zur Geometrie hat, ist offensichtlich, wenn man ein gefaltetes Objekt wieder entfaltet und die entstandenen geometrischen Flächen wie Dreiecke, Rauten, Drachen, Parallelogramme und Ähnliches betrachtet. Aber mithilfe dieser Falttechniken können auch geometrische Polygone selbst gefaltet werden. Aus einem quadratischen Papier entstehen ohne weitere Hilfsmittel wie Zirkel oder Lineal regelmäßige Vielecke oder Rechtecke, deren Seiten in einem bestimmten Verhältnis stehen, wie beispielsweise $1{:}\,\phi$, $1{:}\,\sqrt{2}$, 1 oder $\sqrt{3}$ (vgl. Montroll 2012, S. 10-19). Auch antike mathematische Probleme wie die Dreiteilung eines beliebigen Winkels oder die Verdopplung eines Würfels sind damit möglich.

Was nicht sehr verbreitet ist, ist die Parkettierung. *Origami-Tesselation* beschreibt eine bestimmte Art ein Blatt Papier zu falten, woraufhin ein Teil des Papiers in den Hintergrund rückt und das restliche Papier eine kleinere Oberfläche bildet. Dabei wird ein sich wiederholendes Muster aus geometrischen Flächen – meist Parallelogramme oder

Dreiecke – verwendet. Das zusammengefaltete Papier kann die Eigenschaft haben, dass es durch Auseinanderziehen in eine Richtung vollständig entfaltet wird – wie bei der sogenannten *Miura-Ori-Faltung*. In der Raumfahrt wird diese Eigenschaft verwendet, um ein faltbares Solarmodul (Abb. 5) zu bauen. Dieses kann durch die Faltung auf geringem Raum transportiert und schließlich durch nur einen Motor zu seiner vollständigen Größe ausgebreitet werden (vgl. Brigham Young University 2013).

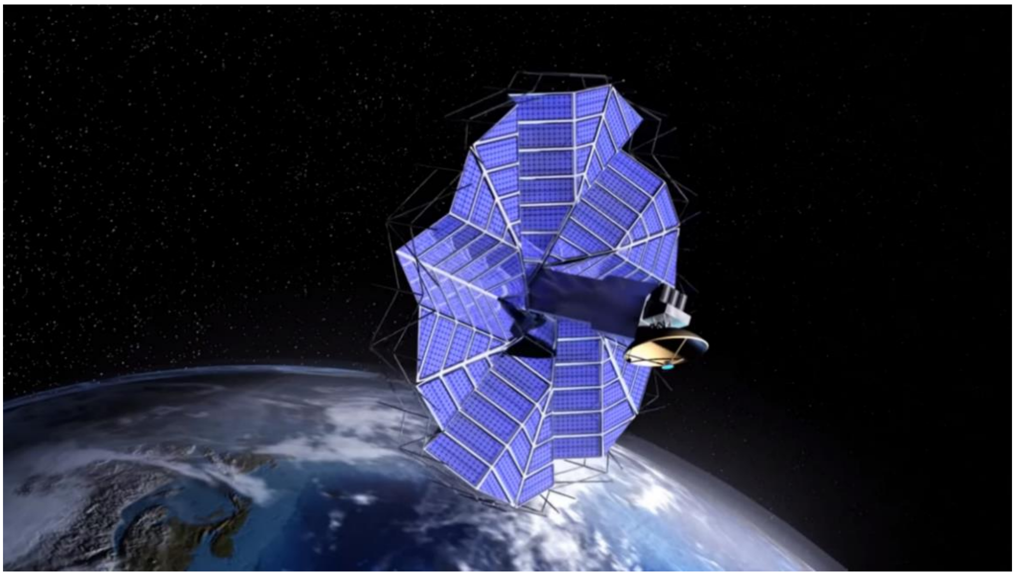


Abb. 5: Solarmodul der NASA, Modell 2013

Ein ähnliches Prinzip wurde für eine ausfahrbare Linse für das Weltraumteleskop *Eyeglass* (1999) benutzt. Maßgeblich daran beteiligt war Robert Lang. Das Teleskop hat einen Durchmesser von 100 Metern und kann durch die besondere Falttechnik auf eine Größe von nur 10 Metern zusammengefaltet und in der Rakete transportiert werden. (vgl. Lang 2015b)

Es gibt Faltungen, die so flexibel sind, dass sie in eine beliebige gekrümmte Fläche geformt werden können (Abb. 6) und dabei dennoch stabil bleiben. Dies wird vor allem in Design und Architektur zu Nutze gemacht und beispielsweise für Tragwerke genutzt.

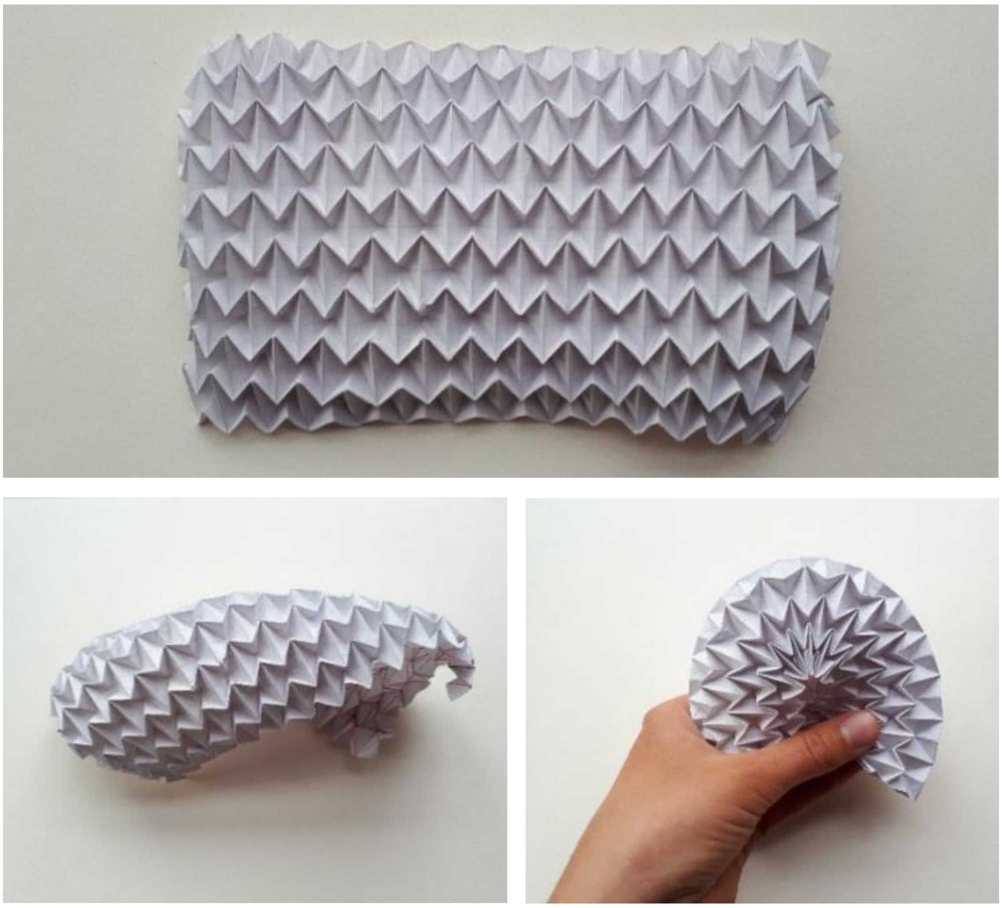


Abb. 6: Flexible Origami-Faltung

Die Mathematik dahinter

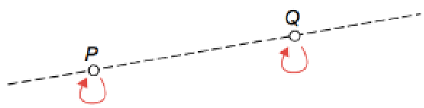
Um die Faltung eines Objekts besser zu verstehen und damit auch neue Objekte zu konstruieren, ist es hilfreich sich mathematische Sätze zu überlegen. Außerdem braucht es ein paar Regeln, welche die möglichen Operationen einer Faltung beschreiben. Auf solche Axiome und Sätze wird im Folgenden eingegangen. Dazu werden ein paar Begriffe benötigt:

- Bergfalte: Das Papier wird nach hinten/unten gefaltet; die Falte ist konvex; meist durch eine Strichpunktlinie gekennzeichnet
- Talfalte: Das Papier wird nach vorne/oben gefaltet; die Falte ist konkav; meist durch eine Strichlinie gekennzeichnet
- Knoten(-punkt): Schnittpunkt von Falten

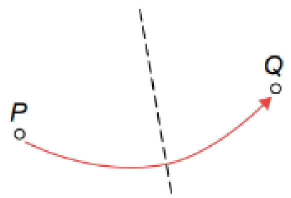
Huzita-Hatori- bzw. Huzita-Justin-Axiome

Diese Reihe von mathematischen Prinzipien bezüglich Origami wurden um 1990 von verschiedenen Mathematikern und Origami-Künstlern wie Jaques Justin, Humiaki Huzita und Koshiro Hatori entdeckt und beschrieben. Sie erklären, welche einzelnen Faltungen möglich sind – zumindest in der Theorie. Es wird von einem idealen Stück Papier und idealen geraden Faltlinien ausgegangen. Ein Punkt bezeichnet im Folgenden einen Schnittpunkt von zwei Falten.

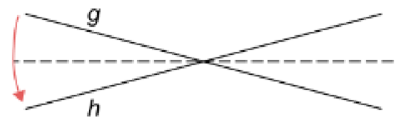
(A1) Zwei Punkte P und Q können durch eine Falte verbunden werden.



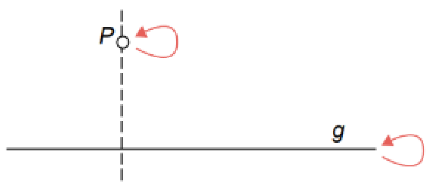
(A2) Ein Punkt P kann auf einen Punkt Q gefaltet werden.



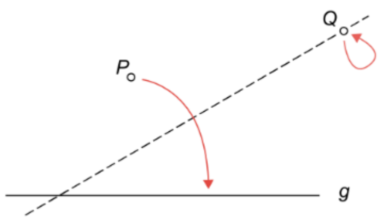
(A3) Eine Gerade g kann auf eine Gerade h gefaltet werden.



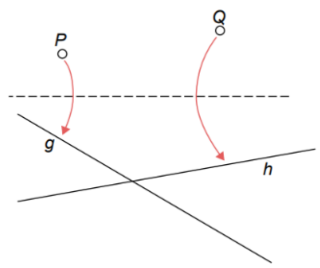
(A4) Man kann eine Falte durch einen Punkt P legen, die senkrecht auf einer Geraden g liegt.



(A5) Ein Punkt P kann so auf eine Gerade g gefaltet werden, dass die Falte durch einen Punkt Q geht.



(A6) Die Punkte P und Q können auf die Geraden g und h gefaltet werden.



(A7) Ein Punkt P kann so auf die Gerade g gefaltet werden, dass die Falte senkrecht zu einer Geraden h steht.

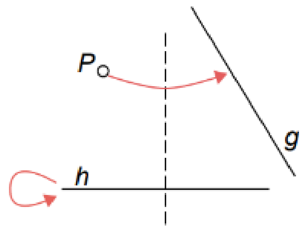


Abb. 7: Huzita-Axiome

„Die Existenz der jeweiligen Faltung setzt dabei implizit immer voraus, dass die gegebene Konfiguration überhaupt eine Lösung zulässt. Sind etwa in (A7) die Geraden g und h parallel und $P \notin g$, so ist keine entsprechende Faltung möglich." (Hungerbühler 2013, S. 5)

Satz von Kawasaki-Justin

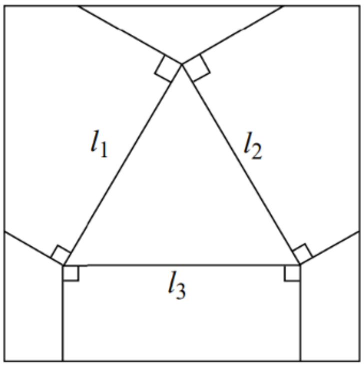
Dieser Satz von Toshikazu Kawasaki trifft eine Aussage darüber, ob eine Figur flach zusammengelegt werden kann, ohne dass weitere Knicke entstehen. Dazu wird das Faltmuster, genauer gesagt die Knotenpunkte der ungefalteten Figur betrachtet. Man bezeichne die Winkel um einen Knoten mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$. Die Anzahl der Winkel ist immer gerade – dies folgt aus dem Satz von Maekawa (wird nachfolgend erklärt). Dann gilt:

Der Knoten ist flach faltbar genau dann, wenn gilt:

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots + \alpha_{2n-1} - \alpha_{2n} = 0.$$

„Beweis: Sei der Knoten flach gefaltet. Umrundet man (auf dem gefalteten Papier) den Knoten auf einem Kreis, so kehrt sich der Umlaufsinn bei jeder Kante um. In der alternierenden Summe ergibt der dabei zurückgelegte Winkel 0, da man den Knoten im gefalteten Zustand nullmal umrundet hat und am Ausgangspunkt wieder ankommt. Die Umkehrung überlassen wir dem Leser." (Hungerbühler 2013, S. 11)

Allerdings muss die gesamte Figur nicht unbedingt flach zusammengelegt werden können, selbst wenn der Satz in jedem einzelnen Knoten des Faltmusters erfüllt ist, wie folgende Beispiele zeigen.



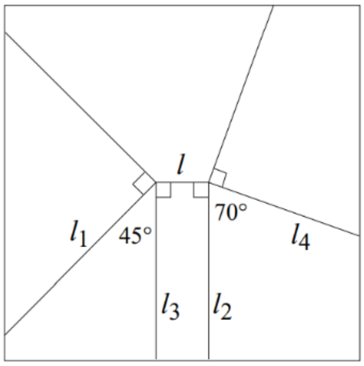


Abb. 8: Gegenbeispiele zur Gesamtfaltbarkeit nach Kawasaki-Justin

Die beiden Faltmuster in Abbildung 8 erfüllen zwar in jedem Knoten Kawasakis Theorem, sind aber dennoch nicht flach zusammenfaltbar. Im linken Beispiel haben die Falten l_1, l_2 und l_3 keine gültige Berg-Tal-Falten-Zuordnung. Das heißt, jede Talfalte müsste neben einer Bergfalte liegen und umgekehrt. Doch da l_1, l_2 und l_3 ein Dreieck ergeben, geht diese Regel nicht auf. In der rechten Figur ist zwar die Berg-Tal-Falten-Zuordnung gültig, aber die Position der Knoten beziehungsweise die Länge der Falte l erzeugt, dass sich eine Fläche und eine Falte kreuzen und somit verhindern, dass die Figur zusammenlegbar ist. (vgl. Hull 2002, S. 4)

Dies zeigt, dass eine Aussage über die vollständige Figur sehr schwer zu erfassen ist. Zwar wurden Sätze dazu formuliert, die Ausführung würde allerdings an dieser Stelle den Rahmen der Diplomarbeit überragen (für weitere Information vergleiche Alperin & Lang 2006 oder Hull 2002).

Satz von Maekawa

Dieser Satz besagt, dass die Gesamtzahl der Falten gerade ist. Sei dazu M die Anzahl der Bergfalten (*mountain creases*) und V die Anzahl der Talfalten (*valley creases*), welche sich in einem Knoten eines flachfaltbaren Faltmusters treffen. Dann gilt:

$$|M - V| = 2$$

„Beweis (nach Siwanowicz): Betrachten wir also einen Punkt, in dem sich $n = M + V$ Falten treffen. Wir falten das Papier in einer Umgebung dieses Knotens flach, schneiden die Ecke ab und betrachten den entstandenen Querschnitt (Abb. 9):

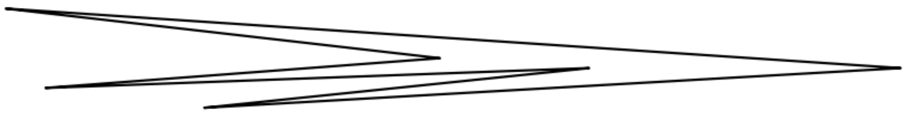


Abb. 9: Beweisidee zum Satz von Maekawa

Wir sehen ein degeneriertes n-Eck. Dabei entspricht eine Talfalte einem Innenwinkel von 0 und eine Bergfalte einem Innenwinkel von 2π. Die Innenwinkelformel liefert also $0 \cdot V + 2\pi \cdot M = (n-2)\pi = (M + V - 2)\pi$. Somit folgt $M - V = -2$. Dreht man das Papier um, so erhält man das andere Vorzeichen.“ (Hungerbühler 2013, S. 10)

Polygon Cutting Theorem (Satz von Demaine, Lubiw & O`Rourke)

Jedes Polygon (nicht notwendigerweise zusammenhängend) lässt sich mit nur einem Schnitt aus einem gefalteten Papier schneiden. Das bedeutet, es soll für jede beliebige geometrische Figur (nicht nur Grundfiguren, sondern jede Kombination aus konkaven und konvexen Ecken) eine Faltung geben, sodass aus der gefalteten Version mit nur einem einzigen geraden Schnitt die gewünschte Figur entsteht. Abbildung 10 zeigt zum Beispiel die Faltung für einen Schwan.

„Der Beweis ist konstruktiv: Es existieren mittlerweile mehrere Algorithmen, welche bei gegebenem Polygon ein entsprechendes Faltmuster berechnen.“ (Hungerbühler 2013, S. 8)

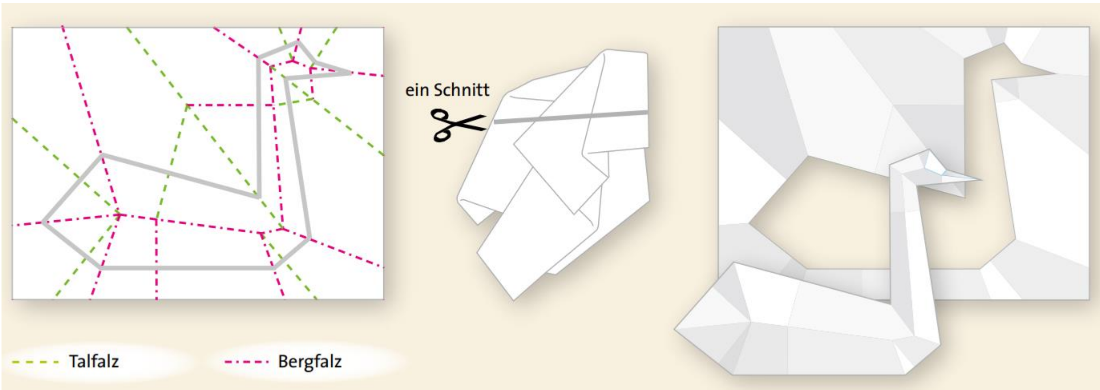


Abb. 10: Faltung für einen Schwan mit einem Schnitt

Es gibt noch weitere mathematische Fragestellungen. Zum Beispiel die Frage, auf wie viele Arten man eine zusammenhängende Reihe von n Briefmarken falten kann. Auch gibt es eine Faltfolge, bei der zwischen bereits gefalteten Kanten abwechselnd Berg- und Talfalten geschoben werden (bezeichnet mit 0 oder 1). Dabei entsteht eine eindeutige unendliche 0-1-Folge. Wenn ein Papierstreifen auf diese Weise gefaltet wird und die Falten alle in einem rechten Winkel fixiert werden, kann auf diese Weise die sogenannte Drachenkurve konstruiert werden, welche ein Fraktal bildet. Des Weiteren kann gezeigt werden, dass jedes Faltmuster zweifärbbar ist, ohne dass zwei gleiche Farbflächen nebeneinander liegen. Ein weiterer Satz gibt Aussage darüber, unter welchen Umständen nicht zwei Berg- beziehungsweise Talfalten nebeneinander liegen können (vgl. Hungerbühler 2013, S. 9-11).

3.3 Goldener Schnitt

Der Goldene Schnitt ist…

- … eine Zahl mit besonderen Eigenschaften
- … ein Muster, das in der Natur immer wieder auftaucht
- … eine Proportion, die wir als besonders schön empfinden
- … ein Stilmittel, das Künstler gerne nutzen
- … und noch einiges mehr (vgl. Brzoska 2015)

Der Goldene Schnitt ist eines der bekanntesten Themen in Bezug auf Mathematik in der Natur beziehungsweise zur Verbindung von Mathematik und Kunst. Er kann auf verschiedene Weise beschrieben, hergeleitet, errechnet und konstruiert werden. Zudem gibt es einige Begriffe, die damit zusammenhängen und im Folgenden näher erklärt werden. Dabei werden sie vor allem auf mathematischer Ebene beschrieben. Auf die historische Entwicklung sowie weitere Konstruktionsmöglichkeiten bezieht sich die Diplomarbeit von Lisa Maria Kuen (S. 11-25). Außerdem geht die Autorin auf die Ausstellung „Göttlich Golden Genial. Weltformel Goldener Schnitt?“ (2017) im Berliner Museum für Kommunikation, kuratiert von Katharina Schilling, ein.

3.3.1 Goldener Schnitt in der Mathematik

Goldener Schnitt

Die gebräuchlichste Erklärung ist die des Teilungsverhältnisses einer Strecke. Man spricht von einem Goldenen Schnitt, wenn man eine Strecke in zwei Teile spaltet und sich der kleinere Teil *m* (*Minor*) zum größeren Teil *M* (*Major*) genauso verhält, wie der größere Teil *M* zur gesamten Strecke *M* + *m*. Als Bruch ausgedrückt gilt folgendes:

$$\frac{M+m}{M}=\frac{M}{m}$$

M umfasst dabei etwa 61,8 % und *m* 38,2 % der gesamten Strecke.

Goldene Zahl

Die irrationale[3] Zahl, die bei dieser Division entsteht, wird auch als Goldene Zahl bezeichnet und meist mit dem griechischen Buchstaben Phi ϕ (oder φ, Φ) gekennzeichnet. Die Zahl ergibt sich durch folgendes Gleichungsschema:

$$\frac{M}{m}=\frac{M+m}{M}$$

Löse die rechte Seite auf:

$$\frac{M}{m}-1-\frac{m}{M}=0$$

Ersetze $\frac{M}{m}$ durch ϕ:

$$\phi-1-\frac{1}{\phi}=0$$

Multipliziere mit ϕ:

$$\phi^2-\phi-1=0$$

Diese quadratische Gleichung hat als einzige positive Lösung:

$$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}6180339887498\ \dots$$

[3] Eine Zahl, die nicht durch Division zweier ganzer Zahlen dargestellt werden kann. Dazu gehören auch die Kreiszahl π, die Eulersche Zahl e sowie $\sqrt{2}$.

Eine weitere Möglichkeit den Goldenen Schnitt zu berechnen, ist der folgende Kettenbruch:

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

Setzt man diese Abfolge lang genug fort, so erhält man dennoch nur eine Näherung von ϕ. Aus Zahlentheoretischer Sicht ist die Zahl ϕ interessant, da sie „die irrationalste" der irrationalen Zahlen ist. Sie ist von allen irrationalen Zahlen jene, die sich am schlechtesten durch einen Bruch annähern lässt. (vgl. Freistetter 2016)

Fibonacci-Zahlen

Im Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt wird oft die Fibonacci-Folge genannt. Dazu stellte Leonardo da Pisa 1202 in seinem Buch *Liber Abaci* das sogenannte Kaninchenproblem vor. Es beschreibt die (unrealistische) Fortpflanzung von Kaninchen. Um zu erfahren, wie viele Nachkommen ein Kaninchenpaar zeugt, werden folgende Annahmen gemacht:

- Jedes Kaninchenpaar wird im Alter von zwei Monaten gebärfähig.
- Jedes Paar bringt ab dann jeden Monat ein neues Paar zur Welt.
- Alle Kaninchen leben ewig.

„Unter diesen Annahmen lebt im ersten Monat ein Paar; dieses wird im zweiten Monat gebärfähig und gebiert im dritten Monat ein weiteres Paar. Auch im vierten Monat bringt das erste Paar ein neues Paar zur Welt, während im fünften Monat beide Paare ein Kaninchenpaar zur Welt bringen. Im fünften Monat gibt es also insgesamt schon 5 Kaninchenpaare" (Beutelspacher & Petri 1996, S. 87-88). Abb. 11 soll dies verdeutlichen.

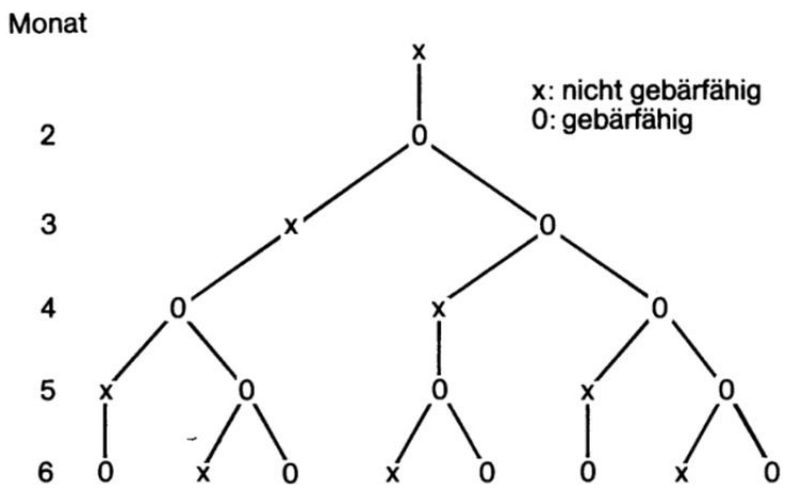


Abb. 11: Kaninchenproblem

Bei dieser Folge bildet die Summe zweier aufeinanderfolgenden Zahlen die nächste Zahl. Die rekursive Formel dazu lautet: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Die ersten Fibonacci-Zahlen lauten: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55… Um zu verstehen, was diese Folge mit dem Goldenen Schnitt zu tun hat, betrachtet man den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Zahlen (Tabelle 1). Dieser nähert sich immer weiter der Goldenen Zahl ϕ. Da ϕ eine irrationale Zahl ist, kann sie jedoch nie exakt durch den Quotienten zweier Fibonacci-Zahlen dargestellt werden.

Tabelle 1: Fibonacci-Zahlen und ihre Quotienten

f_n	f_{n+1}	$\frac{f_{n+1}}{f_n}$
1	1	= 1,0000
1	2	= 2,0000
2	3	= 1,5000
3	5	≈ 1,6667
5	8	= 1,6000
8	13	= 1,6250
13	21	≈ 1,6154
21	34	≈ 1,6190

f_n	f_{n+1}	$\frac{f_{n+1}}{f_n}$
34	55	≈ 1,6176
55	89	≈ 1,6182
89	144	≈ 1,6180
144	233	≈ 1,6181
233	377	≈ 1,6180
377	610	≈ 1,6180
610	987	≈ 1,6180
987	1597	≈ 1,6180

Goldenes Rechteck und Dreieck

Ein Rechteck, dessen Seiten sich im Goldenen Schnitt zueinander verhalten, nennt man ein Goldenes Rechteck. Findet man ein solches Seitenverhältnis in einem gleichschenkligen Dreieck, spricht man von einem Goldenen Dreieck.

Goldener Winkel

Eine Variante des Goldenen Winkels erhält man, wenn man einen Kreis nach dem Goldenen Schnitt aufteilt. Das heißt $\frac{360°}{\phi}$. Dabei beträgt der größere Teil *Major* etwa $222{,}5°$ und der kleine Teil *Minor* etwa $137{,}5°$. Meist wird der kleinere Winkel als der Goldene Winkel bezeichnet. Auch die dabei entstandenen Kreisbögen verhalten sich im Goldenen Schnitt zueinander.

Eine andere Möglichkeit für den Goldenen Winkel ist zum Beispiel die Winkelteilung durch die Diagonale in einem Goldenen Rechteck. Dabei erhält man die Winkel $31{,}7°$ und $58{,}3°$.

Goldene Spirale

„Eine Folge von Quadraten, deren Kantenlängen jeweils im Verhältnis zum Goldenen Schnitt gebildet werden, fügt sich wundervoll zu einer spiral-förmigen Anordnung zusammen. Wenn Viertelkreise in die Quadrate einbeschrieben werden, dann entsteht die Goldene Spirale“ (Fathauer 2017, S. 98). Genauer gesagt ergeben die Viertelkreise eine Approximation der Goldenen Spirale (Abb. 12). Die Radien verlängern sich jeweils um den Faktor ϕ und ergeben damit die Fibonacci-Folge. Die umfassenden Rechtecke ergeben wiederum Goldene Rechtecke.

Diese Spirale findet sich sehr häufig in der Natur. Die Anordnung der Kerne einer Sonnenblume (Abb. 16), der Schwung einer Muschel, die Art wie sich junge Farnspitzen einkringeln. Manche menschlichen Ohren haben ebenfalls diesen bestimmten Schwung.

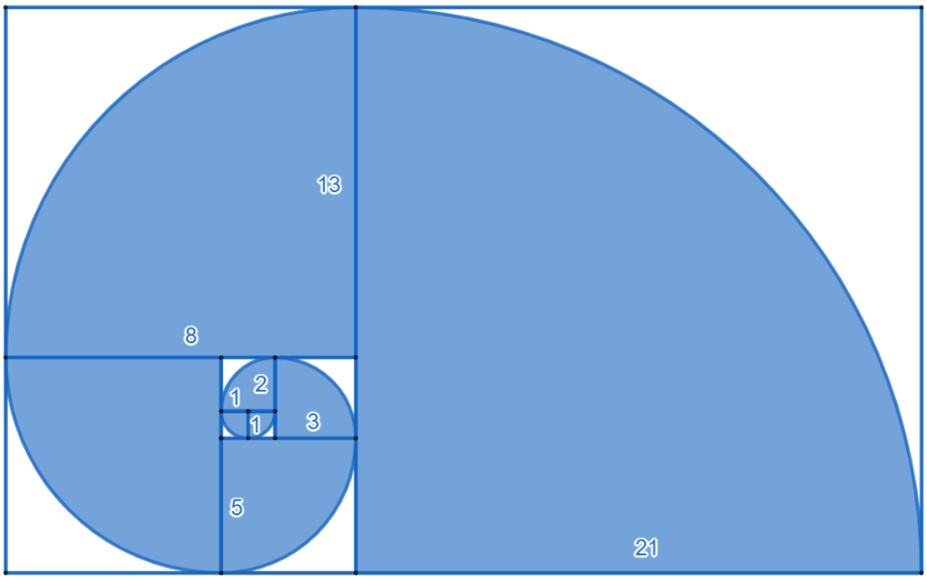


Abb. 12: Goldene Spirale

Fünfeck und Pentagramm

In einem regelmäßigen Fünfeck mit der Seitenlänge 1 betragen die Längen der Diagonalen genau ϕ. Konstruiert man darin ein Pentagramm, so verhalten sich die Abschnitte der Diagonalen ebenfalls im Goldenen Schnitt (Abb. 13). In diesem fünfzackigen Stern hat jede Strecke und Teilstrecke einen Partner, sodass sie sich im Goldenen Schnitt verhalten. Das Pentagramm hatte schon für Pythagoras und seine Anhänger eine mystische Bedeutung (vgl. Fathauer 2017, S. 98). Auch in anderen Kulturkreisen gehört das Pentagramm zu den ältesten magischen Symbolen.

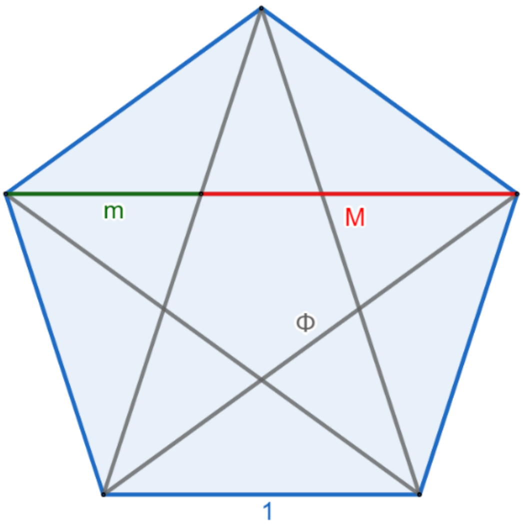


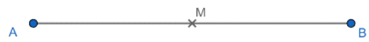
Abb. 13: Fünfeck mit Pentagramm und Goldenem Schnitt

Konstruktion mit Zirkel und Lineal

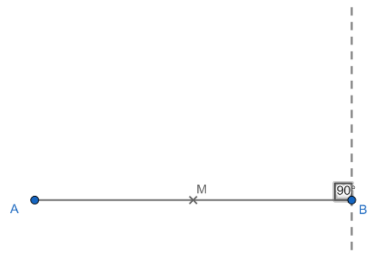
Will man eine Strecke im Goldenen Schnitt teilen, ohne diesen zu berechnen, kann folgende Konstruktion mit Zirkel und Lineal hilfreich sein.

Ausgangssituation: Eine beliebige Strecke AB soll im Verhältnis des Goldenen Schnitts geteilt werden.

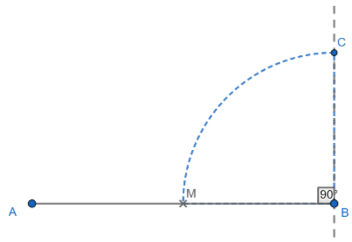
Konstruiere den Mittelpunkt M der Strecke AB.



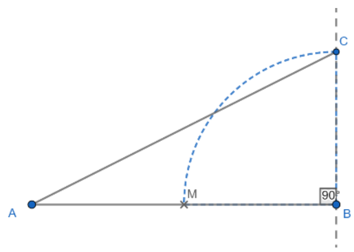
Konstruiere durch B eine zu AB senkrechte Gerade.



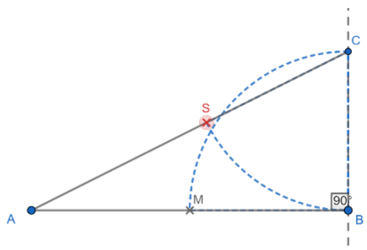
Schlage mit dem Zirkel die Länge MB auf der Senkrechten ab und markiere den Punkt C.



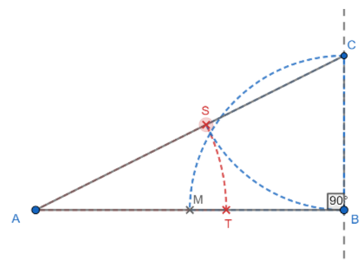
Verbinde die Punkte A und C.



Schlage die Länge BC auf der Strecke AC ab und markiere den Punkt S.



Schlage die Länge AS auf der Strecke AB ab und markiere den Punkt T.



Die Strecken AT und TB bilden die Teilstrecken des Goldenen Schnitts.

Abb. 14: Konstruktion des Goldenen Schnitts

Eine weitere einfache Methode den Goldenen Schnitt darzustellen, ist folgende Papierfaltung: Nimmt man einen langen, gleichmäßig breiten Papierstreifen (zum Beispiel 1 cm breit, 10 cm lang) und macht einen einfachen Knoten hinein, so zeigt der flachgedrückte Knoten ein regelmäßiges Fünfeck mit einer vollständig sichtbaren und einer zum Teil verdeckten Diagonalen (Abb. 15). Der Schnittpunkt dieser beiden markiert den Goldenen Schnitt.

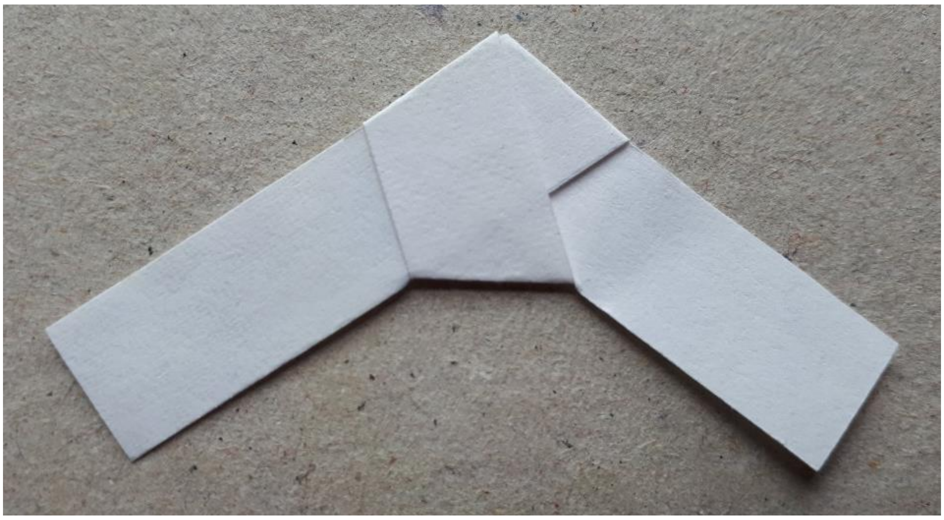


Abb. 15: Goldener Schnitt im Papierknoten

3.3.2 Goldener Schnitt in der Natur

Ein Beispiel: Die Rose. Die Blütenblätter einer Rose sind nicht willkürlich, sondern in schöner Regelmäßigkeit angeordnet. Betrachtet man die Rose von oben, erkennt man die Präzision dieser Anordnung. Jedes Blütenblatt hält exakt denselben Abstand zu dem Blatt ein, das davor gewachsen ist (ausgehend von der Mitte der Blütenblätter). Zieht man einen Kreis um die Rose, so teilt der Abstand dieser beiden Blätter den

Kreis immer im Winkel von genau 137,5 Grad – dem Goldenen Winkel. (vgl. Brzoska 2015) Abbildung 16 soll dies schematisch darstellen. Dabei erkennt man, dass durch die Blütenblätter die Goldene Spirale in beide Richtungen gelegt werden kann.

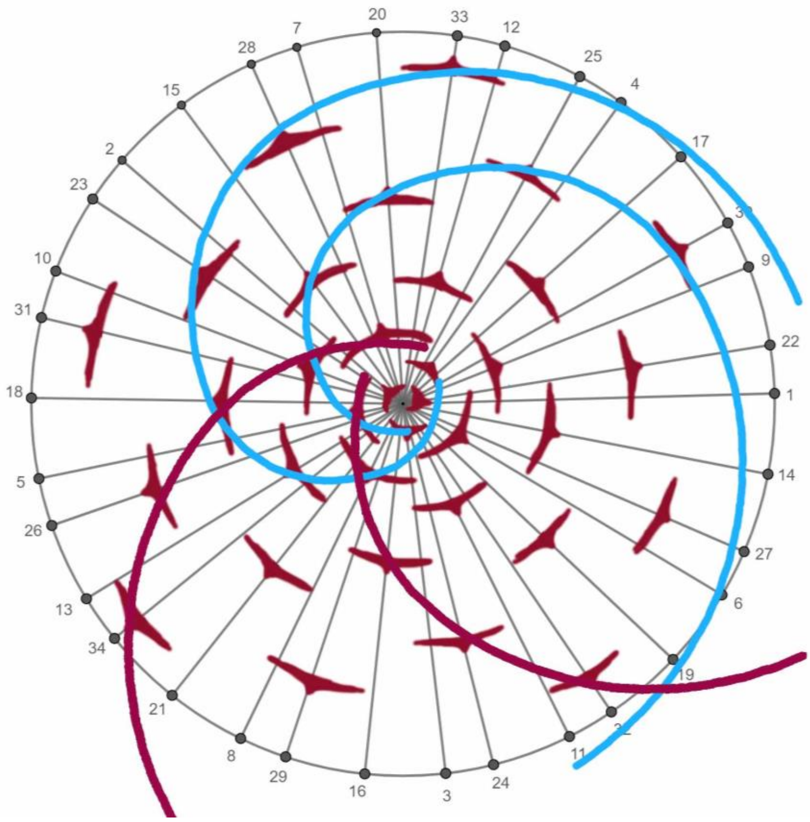


Abb. 16: Schematische Darstellung einer Rose

Natürlich gibt es noch andere Muster, in denen Blätter angeordnet sein können. Zum Beispiel um 180° versetzt, also einander gegenüber. Warum welches Muster bei welcher Pflanzenart zu finden ist, könnte die Evolution erklären. Jene Strukturen, die sich bei der Evolution durchsetzen konnten, haben sich als besonders nützlich erwiesen. Dazu gehört auch der Goldene Schnitt. Sein Vorteil könnte darin bestehen, dass die Pflanze auf diese Weise besonders gut Sonne und Regen ausnutzen kann. Die Blütenblätter verdecken jeweils nur einen Teil der darunter liegenden Blätter. Also erreicht die Sonne alle Blätter. Bei anderen Strukturen, bei denen beispielweise die Blätter einander gegenüberliegen, kann es passieren, dass darunterliegende Blätter gar kein Licht abbekommen. „Die Blattstellung nach dem Goldenen Winkel bietet Pflanzen, die besonders viel Licht brauchen, also einen gewissen Vorteil“ (Brzoska 2015). Es könnte auch was mit den Nährstoffen zu tun haben.

> „Neue Blätter werden bei wachsenden Pflanzen unmittelbar hinter der Sprossspitze, also der Spitze des Stängels angelegt. Bei Untersuchungen des mit der Kresse verwandten Ackerschmalbandes (Arabidopsis thaliana) fanden [Forscher] zunächst, dass neue Blätter immer dort entstehen, wo die Konzentration des Wachstumshormons Auxin am höchsten ist. […] Das Zusammenspiel zwischen Protein und Wachstumshormon sorgt dafür, dass bereits angelegte Blattknospen weiteres Auxin aufnehmen und dadurch verhindern, dass sich in ihrer direkten Umgebung neue Blätter bilden können. Dort ist dann die Konzentration des Wachstumshormons zu gering. Auf diese Weise entsteht eine geometrische Anordnung, bei der aufeinanderfolgende Blätter exakt durch den goldenen Winkel getrennt sind.“ (Tillemans 2003)

Auch bei anderen Pflanzen ist der Goldene Schnitt zu entdecken. Salat- und Kohlköpfe, Artischocken oder Aloe Vera zeigen ebenfalls diese Blattanordnung. Bei den Schuppen einer Ananas, Sonnenblumenkernen (Abb. 17), Tannenzapfen oder Romanesco ist dagegen die Fibonacci-Spirale zu erkennen. Es ergeben sich gleichzeitig linksdrehende als auch rechtsdrehende Spiralen. „Das Bemerkenswerte ist nun, dass die Anzahl der Spiralen immer benachbarte Zahlen aus der Fibonacci-Reihe sind. Bei der Ananas sind es oft acht linksdrehende und 13 rechtsdrehende Spiralen. Bei der Sonnenblume kommen häufig die Zahlenpaare 34 und 55 vor.“ (Brzoska 2015) Auch die Anzahl von Blütenblättern stimmen oft mit den Fibonacci-Zahlen überein. Je nach Größe der Pflanze variiert die Anzahl. Sucht man nach größeren Dimensionen, in denen die Fibonacci-Spirale vorkommt, so kann man Wetterphänomene beobachten. Aus dem All betrachtet nehmen manche Hurrikans diese Form an.

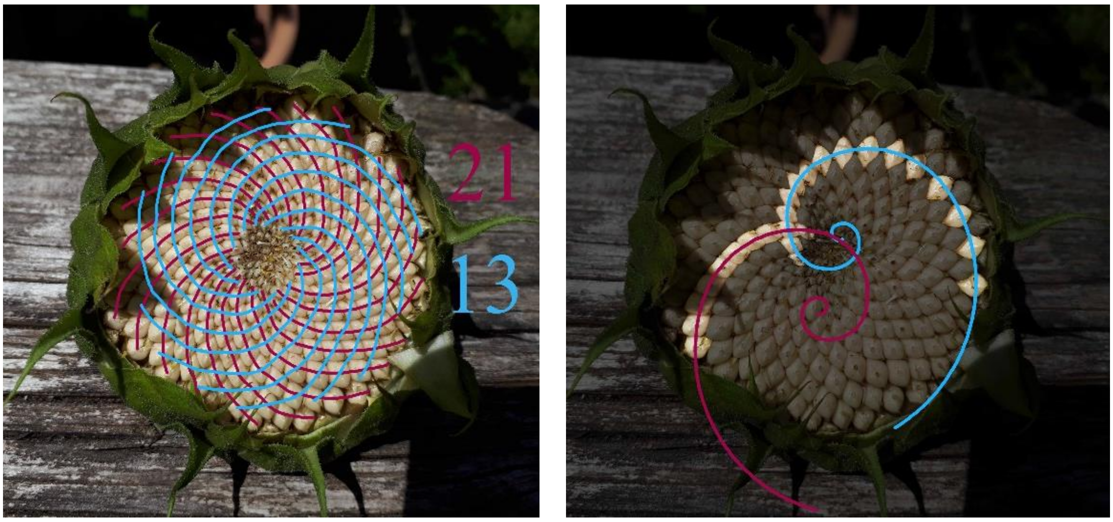


Abb. 17: Goldene Spirale in einer Sonnenblume

Die Goldene Proportion findet sich auch im menschlichen Körper – zumindest näherungsweise. Das Verhältnis zwischen der Länge der Fersen bis zum Bauchnabel und von dort aus bis zum Scheitel. Genauso zwischen Ober- und Unterschenkel oder Handfläche zu den Fingern. Selbst im Gesicht finden sich manchmal Goldene Schnitte. In diesem Fall wird ein solches Gesicht als besonders ästhetisch empfunden. (vgl. auch Zeising 1854, ab S. 176)

Für den deutschen Philosophen Adolf Zeising „war der Goldene Schnitt ein ästhetisches Idealmaß. Deswegen hat er keine echten Menschen vermessen, sondern seine Theorie anhand klassischer Statuen der Antike entwickelt. Seiner Meinung nach kam in solchen künstlerischen Darstellungen die menschliche Gestalt am besten zum Ausdruck.“ (Brzoska 2015) Dass der Goldene Schnitt nur ansatzweise im Menschen zu finden ist, bedeutet wohl, dass er für die Funktion des Körpers und seine Fähigkeiten keine Rolle spielt. Der Mathematiker Günter Ziegler meint dazu, der Mensch sei nicht präzise und nicht nach einem mathematischen Konstruktionsprinzip gebaut. „Wir müssen da schon aufpassen, dass wir da nicht einfach immer irgendwelche Zahlenverhältnisse reininterpretieren.“ (zit. n. Brzoska 2015).

Wie ein Mensch mit „perfekten Proportionen“ aussähe, haben die Bildhauer in der Antike und Renaissance in vielen Statuen und Plastiken dargestellt. Zeising führt dafür unter anderen den *Apollo von Belvedere* sowie die *mediceische Venus* an und analysiert diese nach ihren Proportionen (Zeising 1854, S. 175). Auch Leonardo da Vinci fertigte viele analysierende Zeichnungen zu diesem Thema. Bei der Federzeichnung zum *Vitruvianischen Menschen* setzte er den menschlichen Körper mit den Idealfiguren Kreis und Quadrat in Bezug zueinander. Genauso befasste sich Albrecht Dürer ausgiebig mit diesem Thema und verfasste die *Vier Bücher von menschlichen Proportionen*. Michelangelo hingegen stand der Proportionslehre von Dürer kritisch gegenüber:

> „[…] daß er [Michelangelo] den Albrecht Dürer liest, dieser ihm sehr schwach vorkommt, da er in seinem Geiste sieht, um wie vieles schöner und nützlicher dieser sein Entwurf über selbige Materie [die Anatomie] wäre. Und um die Wahrheit zu sagen, Albrecht handelt nur von den Maßen und der Verschiedenheit der Körper, davon man eine sichere Regel nicht geben kann, und macht die Gestalten wie Pfähle; von dem aber, was das wichtigste ist, von den menschlichen Gebärden und Bewegungen, sagt er kein Wort.“ (aus „Das Leben des Michelangelo Buonarroti“, zit. n. Rupprich 1959, S. 25f)

Es gibt noch einen weiteren Aspekt, bei dem der Goldene Schnitt im Körper vorkommt: Die DNA. Genauer gesagt in der Konstruktion der Doppelhelix.

> „Die beiden Helices der DNA winden sich, topologisch betrachtet, um einen virtuellen Hohlkörper. Dabei sind sie um 120° versetzt. In der Literatur wird der Durchmesser der Doppelhelix mit 2 nm und die Höhe der Wendel mit 3,4 nm angegeben. Rechnerisch ergibt sich daraus ein Steigungswinkel von 28°. Sowohl das Verhältnis von Durchmesser und Höhe mit 1 zu 1,7 als auch der Steigungswinkel liegen sehr nahe, aber eben nicht genau am Verhältnis des Goldenen Schnittes. Nun reagieren die Verhältniszahlen sehr sensibel auf Änderungen, was zu ‚Anpassungen' verleitet. Wird der Durchmesser der DNA auf 2,1 nm definiert, errechnet sich ein Verhältnis, das mit 1 zu 1,62 genau dem Goldenen Schnitt entspricht. Die Festlegung dieses Durchmessers ist jedoch willkürlich." (Quadbeck-Seeger 2020)

Da die beiden Helices nicht um 180° versetzt sind, sondern um 120°, entstehen zwei unterschiedlich breite Abstände zwischen ihnen. Die Breiten dieser Abstände verhalten sich ebenfalls im Goldenen Schnitt zueinander.

Bleibt man im Bereich der Naturwissenschaft, so können noch die Quasikristalle erwähnt werden. Dies sind Kristalle, deren Struktur als unmöglich galten. Die Muster, in denen die Kristalle eine Oberfläche bilden, wiederholen sich nicht, aber: „In den Quasikristallen folgen die unterschiedlichen Abstände zwischen den Atomen dem goldenen Schnitt" (Odenwald 2013, S. 2). Diese Muster findet man auch in mittelalterlich-arabischen Mosaiken wie etwa in der spanischen Alhambra in Granada oder dem Darb-i-Imam-Schrein in Iran. „Diesem Mosaikmuster folgen zwar mathematischen Regeln, wiederholen sich aber nie" (ebd.).

Eng damit verwandt ist die Penrose-Parkettierung. Mit nur zwei verschiedenen geometrischen Flächen lässt sich eine Ebene lückenlos parkettieren – wobei sich das Grundschema nie periodisch wiederholt. Die Flächen – zwei unterschiedliche Rauten – basieren auf dem Goldenen Schnitt. Verwendet man 1 als die Länge der Seiten, so hat die längere Diagonale der breiteren Raute die Länge ϕ. Die schmalere Raute hat eine Diagonale der Länge $\frac{1}{\phi}$. Auch die Flächeninhalte der beiden Rauten sowie die Anzahl der jeweils verwendeten Kacheln verhalten sich im Goldenen Verhältnis zueinander. (vgl. Behrends 2018, S. 251-264)

3.3.3 Goldener Schnitt in Kunst und Architektur

Spricht man vom Goldenen Schnitt, so bringen ihn die meisten Menschen wahrscheinlich mit der Kunst in Verbindung. Hier wird er als besonders schön und harmonisch erachtet. Wie bereits im vorherigen Abschnitt erwähnt, tritt diese göttliche Proportion häufig in Skulpturen der Antike auf. Damals wurde das Teilungsverhältnis auch in Bauwerken verwendet. Der Parthenon auf der Athener Akropolis ist dafür ein gutes Beispiel. Sowohl in seiner Fassade als auch im Grundriss finden sich mehrfach Goldene Schnitte. Auch den großen Pyramiden in Ägypten werden Goldene Schnitte nachgesagt, aber es ist stark umstritten, ob diese bewusst eingearbeitet wurden. Desgleichen ist in vielen Malereien der Renaissance dieses Schema zu finden – wenn auch hier nicht immer klar ist, ob gewollt oder Zufall. In manchen barocken Kirchen entdeckt man an den wulstigen Säulen einen Goldenen Winkel – welcher an die Steigung einer DNA-Doppelhelix erinnert. Ob aber der Goldene Schnitt bewusst in vielen Kunstwerken eingesetzt wurde, ist oft umstritten.

3.4 Bildanalyse vs. Kurvendiskussion

Ein Aspekt, der sowohl in der Mathematik als auch in der Kunst einen großen Bereich umfasst, ist das genaue Beobachten, Beschreiben und Interpretieren von Sachverhalten. In der Kunstgeschichte werden dazu Gemälde und andere Kunstwerke analysiert. Bei der Mathematik kommt das zum Beispiel bei der Kurvendiskussion vor. Im Folgenden möchte ich einen Vergleich zwischen der Kurvendiskussion und einer Bildanalyse versuchen.

Zuerst zu den Begriffen: Unter einer Bildanalyse oder -betrachtung versteht man die visuelle Untersuchung von künstlerischen Werken. Dabei geht man systematisch vor. Man betrachtet ein Bild unter Berücksichtigung verschiedener Kriterien, wie Bildinhalt, Komposition, Lichtführung, Räumlichkeit und Farbe. Letztendlich kommt die Interpretation des Dargestellten. Die Kurvendiskussion ist ein Teilgebiet der Analysis. Sie beschäftigt sich mit der geometrischen Untersuchung eines Graphen einer Funktion. Dabei werden charakteristische Punkte wie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte, Steigung oder das Verhalten im Unendlichen, betrachtet.

3.4.1 Beispiele

Da nicht alle Leserinnen und Leser dieser Arbeit in sowohl Analysis als auch Bildbetrachtung geschult sind (beziehungsweise das Wissen darüber eventuell seit der Schulzeit verloren haben), soll im Folgenden je eine beispielhafte Analyse durchgeführt werden. Die dabei auftretenden Ähnlichkeiten und Unterschiede werden anschließend in Worte gefasst.

Bildanalyse

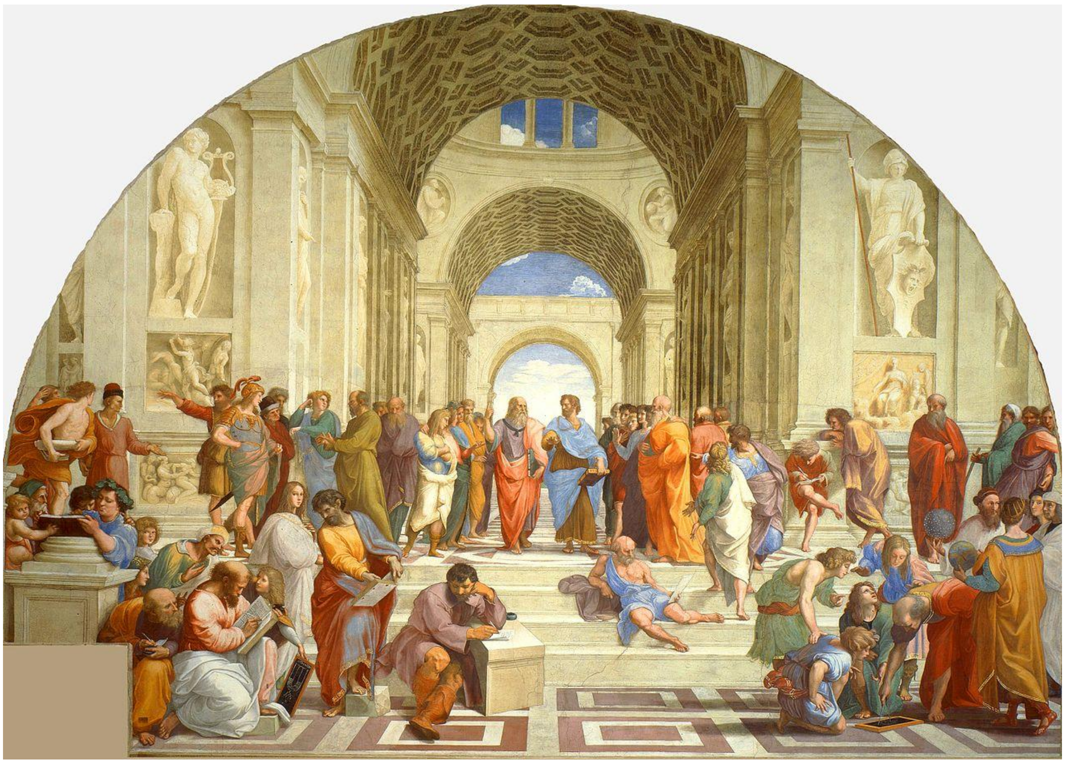


Abb. 18: Die Schule von Athen, Raffael 1510-11

Ein besonderes Werk der italienischen Hochrenaissance stellt „Die Schule von Athen" (1510-11) von Raffael Sanzio dar. Das Fresko innerhalb der Papstresidenz zeigt die großen Wissenschaftler und Philosophen der Antike. Raffael will damit die Verbindungen zwischen dem Wissen des klassischen Altertums und dem Christentum darstellen (vgl. Mason 2009, S. 53) und damit den Humanismus festhalten. Dabei seien einige Philosophen durch Portraits von zeitgenössischen Künstlern repräsentiert. Man erkennt die beiden größten Philosophen des Altertums Platon (als Leonardo da Vinci) und Aristoteles in der Bildmitte. Euklid oder Archimedes (als Donato Bramante) hält in der rechten unteren Ecke Geometrieunterricht. Neben ihm Ptolemäus mit einem Globus. Heraklit (als Michelangelo) sitzt in der unteren Mitte. Neben Platon steht Sokrates. Diogenes liegt auf den Stufen. Links unten erklärt Pythagoras seine

Proportionslehre. Raffael hat sich selbst ebenfalls ins Bild gesetzt (rechts unten). Es sind noch viele weitere Personen gemalt, deren Zuordnung jedoch umstritten ist. Im Hintergrund verweisen Torbögen, Tonnengewölbe, Pilaster und Nischenplastiken auf ein mächtiges Gebäude. Die Architektur des Bauwerkes ist angelehnt an den Entwurf für den neuen Petersdom von Donato Bramante. Dieses Bild zeigt die Wichtigkeit der Antike für die Menschen der Renaissance. Philosophie und Wissenschaft stehen zusammen mit den Künsten auf einer Ebene. (ebd.)

An dieser Stelle sollte erwähnt werden, wie wichtig kontextuelles Wissen für eine Bildinterpretation ist. Ohne Anhaltspunkte, wie bestimmte Symbole oder Anekdoten, ist es kaum möglich, den Inhalt eines Kunstwerkes in eine umgebende Geschichte einzubetten oder zu deuten. In diesem Beispiel könnte man den abgebildeten Personen keine konkreten Persönlichkeiten zuordnen.

Eine Kompositionsanalyse zeigt, wie viele genaue Überlegungen noch vor dem Gestalten des eigentlichen Freskos geschehen sein müssen. In Abbildung 19 sind einige dieser Schemen farblich nachgezogen. Es fällt besonders auf, dass das Bild eine senkrechte Symmetrieachse besitzt. Auch teilt eine waagrechte Linie auf der Mitte des Freskos das Bild in zwei Hälften: In der oberen Hälfte ist nur die Architektur des Hintergrundes zu sehen. In der unteren Hälfte tummeln sich die dargestellten Personen. Ganz deutlich ist auch die perfekte Zentralperspektive zu erkennen, deren Fluchtpunkt auf der Mittelsenkrechten etwas unterhalb der Hälfte – zwischen Platon und Aristoteles – liegt. Die sich wiederholenden Kreisbögen des Deckengewölbes lassen das Gebäude räumlich erscheinen, als könne die Betrachterin oder der Betrachter selbst in den Raum steigen. Ein besonderes Merkmal dieser Komposition sind die vielen Goldenen Schnitte. Beispielsweise liegt der Fluchtpunkt genau auf dem Goldenen Schnitt zwischen dem oberen und unteren Rand des Gesamtbildes. Ein weiteres goldenes Verhältnis zwischen dem Fluchtpunkt, der oberen Waagrechten des hintersten Torbogens und dem oberen Kreisbogen des zweiten Tores. Auch horizontal sind die Goldenen Schnitte zu finden, wie zum Beispiel der Abstand zwischen den beiden Statuen auf dem zweiten Tor und dem Abstand zwischen Statue und Bildrand. Es sind noch weitere solcher Verhältnisse in diesem Fresko eingebaut, welche an dieser Stelle nicht weiter angeführt werden.

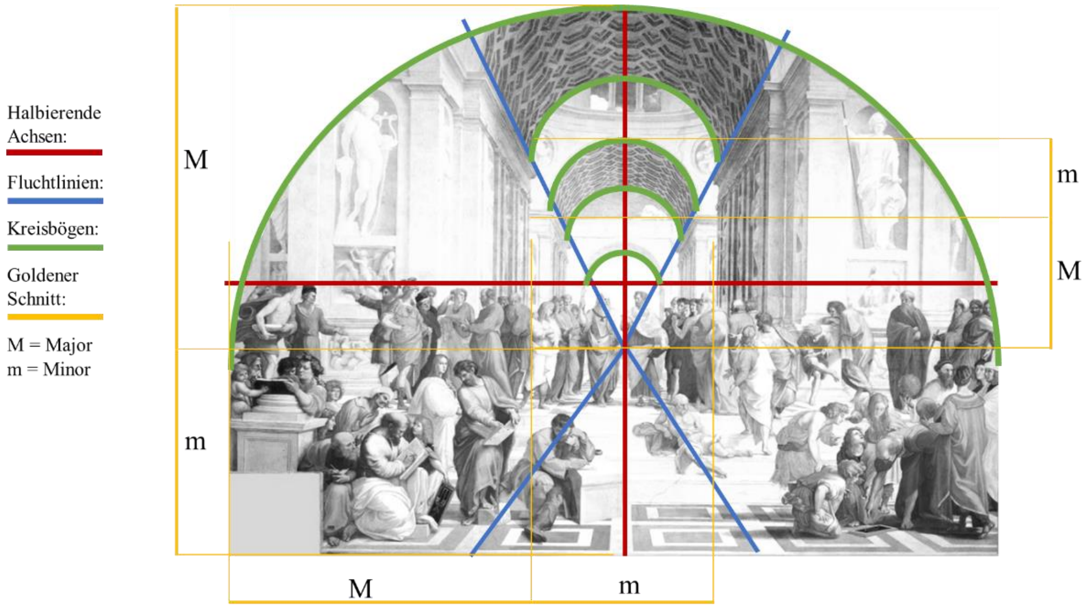


Abb. 19: Kompositionsanalyse der Schule von Athen

Kurvendiskussion

Im Folgenden soll eine Kurvendiskussion veranschaulicht werden. Es sei gegeben:

$$f(x) = 0{,}5x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x + 4$$

Tabelle 2: Kurvendiskussion

Definitionsmenge:	
Die Definitionsmenge der obigen Funktion besteht aus jenen Zahlen, die für x eingesetzt werden dürfen. In diesem Fall sind dies alle reellen Zahlen.	$D_f = \mathbb{R}$
Wertebereich:	
Der Wertebereich sind jene Zahlen, die $f(x)$ erreichen kann. In diesem Fall sind dies alle reellen Zahlen.	$W_f = \mathbb{R}$
Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen):	
Die erste Nullstelle kann durch Raten gefunden werden:	$f(1) = 0{,}5 \cdot 1^3 - 1{,}5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 4$ $= 0{,}5 - 1{,}5 - 3 + 4$ $= 0$

Somit ist bei 1 eine Nullstelle. Für die weiteren Nullstellen führt man eine Polynomdiskussion mit der gefundenen ersten Nullstelle durch: Lösen mit der allgemeinen quadratischen Gleichung („Mitternachtsformel“):	$x_1 = 1$ $(0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 - 3x + 4) \div (x - 1)$ $= 0{,}5x^2 - x - 4$ $x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (-4)}}{2 \cdot 0{,}5}$ $= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{1} = 1 \pm 3$ $x_2 = 4, x_3 = -2$ Damit sind die Nullstellen bei den x-Werten $-2, 1$ und 4.
Schnittpunkte mit der y-Achse:	
Setze $x = 0$ und berechne den Funktionswert:	$f(0) = 0{,}5 \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 4 = 4$ Der Graph schneidet die y-Achse an der Stelle $y = 4$.
Symmetrieverhalten:	
Es gilt: • $f(-x) = f(x)$: achsensymmetrisch zur y-Achse • $f(-x) = -f(x)$: punktsymmetrisch zum Ursprung Setze also $-x$ in die Funktion ein:	$f(-x) = 0{,}5(-x)^3 - 1{,}5(-x)^2$ $- 3(-x) + 4$ $= -0{,}5x^3 - 1{,}5x^2$ $+ 3x + 4$ $\neq f(x) \neq -f(x)$ Der Funktionsgraph ist also weder achsen- noch punktsymmetrisch.
Verhalten im Unendlichen:	
Wie verhalten sich die Funktionswerte, wenn x immer kleiner bzw. größer wird:	$\lim_{x \to \infty} 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 - 3x + 4 = \infty$ $\lim_{x \to -\infty} 0{,}5x^3 - 1{,}5x^2 - 3x + 4 = -\infty$
Monotonie und Extremwerte:	
Berechne 1. Ableitung: Berechne 2. Ableitung: Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung:	$f'(x) = 1{,}5x^2 - 3x - 3$ $f''(x) = 3x - 3$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = 1{,}5x^2 - 3x - 3$

	$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1{,}5 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1{,}5}$ $= \frac{3 \pm \sqrt{27}}{3} = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}}{3}$ $= 1 \pm \sqrt{3}$ $x_1 = 1 + \sqrt{3}, x_2 = 1 - \sqrt{3}$
Um zu bestimmen, ob ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt, werden die x-Werte in die 2. Ableitung eingesetzt. Es gilt: • $f''(x) > 0$: Tiefpunkt • $f''(x) < 0$: Hochpunkt	$f''(1 + \sqrt{3}) = 3 \cdot (1 + \sqrt{3}) - 3$ $= 3\sqrt{3} > 0$ $f''(1 - \sqrt{3}) = 3 \cdot (1 - \sqrt{3}) - 3$ $= -3\sqrt{3} < 0$ Hochpunkt bei x_1, Tiefpunkt bei x_2
Die zugehörigen Funktionswerte berechnen: Punkte angeben:	$f(1 + \sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$ $f(1 - \sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$ $H(1 + \sqrt{3} \mid -3\sqrt{3})$ $T(1 - \sqrt{3} \mid 3\sqrt{3})$
Steigungsverhalten angeben:	Der Graph steigt für $x \in \left]-\infty; 1 - \sqrt{3}\right[$ und $\left]1 + \sqrt{3}; \infty\right[$ und fällt für $x \in \left]1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\right[$.
Krümmung und Wendepunkte:	
Nullstelle der 2. Ableitung berechnen: Den zugehörigen Funktionswert berechnen: Punkt angeben: Setze einen Wert vor und nach dem Wendepunkt ein. Es gilt: • $f''(x) > 0$: $f(x)$ ist linksgekrümmt • $f''(x) < 0$: $f(x)$ ist rechtsgekrümmt	$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $f(1) = 0$ $W(1 \mid 0)$ $f''(0) = -3 < 0$ $f''(2) = 3 > 0$

Krümmungsverhalten angeben:	Der Graph ist rechtsgekrümmt für $x \in]-\infty; 1[$ und linksgekrümmt für $x \in]1; \infty[$.

Der zugehörige Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:

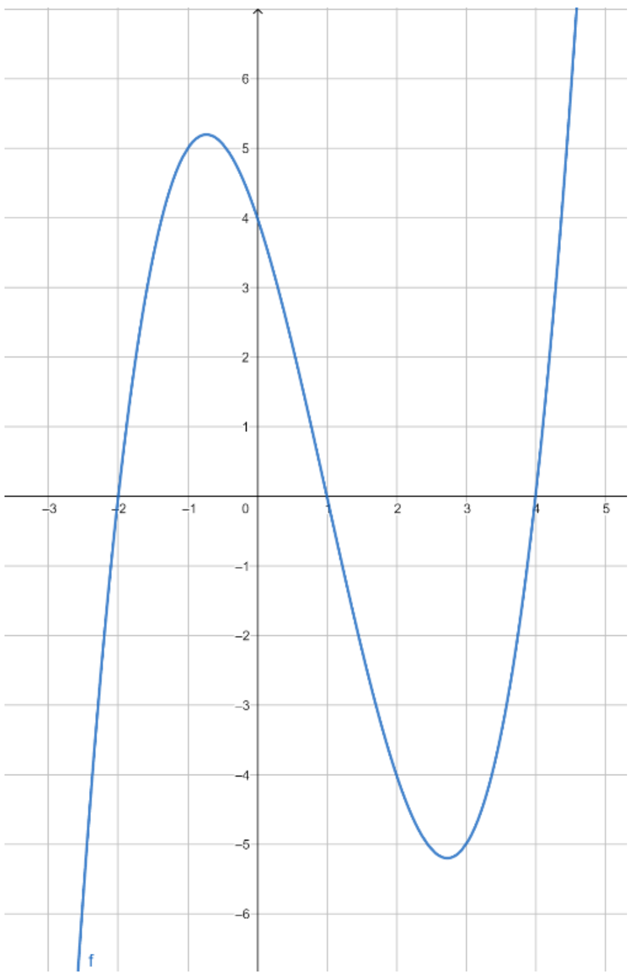


Abb. 20: Funktionsgraph 3. Grades

Auch für die Kurvendiskussion ist ein gewisses Hintergrundwissen vorausgesetzt. Ohne dieses könnten die wesentlichen Fragen weder beantwortet noch die Ergebnisse interpretiert werden. Das heißt, man muss die Vorgehensweisen, Rechenregeln und Interpretationen der Ergebnisse kennen.

3.4.2 Unterschiede

Beide Schemata gehen sehr strukturiert vor. Sie lassen nicht viele Freiheiten in der Vorgehensweise zu, abgesehen von der Reihenfolge der Fragen. Worin unterscheiden sich diese Schemata also? Es sind die Emotionen. Der Graph einer Funktion ruft wahrscheinlich nur sehr selten Emotionen bei der betrachtenden Person hervor. In der Schule kann es vorkommen, dass eine Kurvendiskussion bei den Schülerinnen und Schülern Wohlbefinden (wenn sie die Aufgabe leicht lösen können) oder Unbehagen (wenn die Aufgabe ihre Fähigkeiten übersteigt) auslöst. Doch diese Gefühle sind meist nicht von langer Dauer. Ein Kunstwerk stattdessen kann viele verschiedene Empfindungen beim Betrachter oder bei der Betrachterin hervorrufen und diese für lange Zeit beschäftigen.

Ein weiterer Unterschied ist, dass eine Kurvendiskussion weit weniger Worte braucht als eine Bildanalyse. In der Kurvendiskussion reicht die mathematische Sprache der Zahlen, Zeichen und Buchstaben aus, um die Kernaussagen zu vermitteln – vorausgesetzt, die Leserschaft kann die Ergebnisse korrekt einordnen. Die Bildbetrachtung kann vielseitig interpretiert werden und darum sollte sie ausführlicher beschrieben werden, um Missverständnisse zu vermeiden.

3.4.3 Verknüpfung

Zieht man nun einen Vergleich von Bildbetrachtung (genauer: Kompositionsanalyse) und Kurvendiskussion, so könnte man folgende Aspekte einander gegenüberstellen:

Tabelle 3: Bildanalyse vs. Kurvendiskussion

Bildanalyse	**Kurvendiskussion**
Um welche Gattung handelt es sich?	Welchen Grad hat der Graph?
Welche Daten sind vorhanden? (Titel, Künstler, Jahr)	In welchem Bereich ist der Graph definiert?
Wie verhält sich der Bildausschnitt?	Wo liegen die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen?
Gibt es eine oder mehrere Symmetrieachsen im Bild?	Ist der Verlauf des Graphen achsen- oder punktsymmetrisch oder keines von beidem?

Welche Punkte im Bild lenken die Aufmerksamkeit des Auges auf sich?	Wo liegen die Hoch- und Tiefpunkte des Graphen? Gibt es Sattelpunkte?
Gibt es irritierende Punkte, die einen Twist in der Harmonie des Bildes erzeugen?	Hat der Graph Wendepunkte?
Gibt es unsichtbare Linien, die die Bildinhalte voneinander trennen oder sich an ihnen orientieren?	Hat der Graph Polstellen oder Lücken (Werte, die der Graph nicht annehmen darf)? Und gibt es darum Asymptoten?

Um in der Mathematik diese charakteristischen Punkte zu finden, müssen die erste und zweite Ableitung (selten höher) der Funktion gebildet werden. Vielleicht könnte man das gleichsetzen mit der Betrachtung der inhaltlichen Vielschichtigkeit eines Bildes. Letztendlich kommt die Interpretation. Bei der Bildanalyse geht es dabei darum eine Aussage zu finden, was sich der Künstler/die Künstlerin bei der Erstellung des Bildes gedacht haben könnte. Bei der Kurvendiskussion wird nicht immer eine Interpretation verlangt. Doch oft ist sie Teil der Aufgabenstellung, wenn es darum geht, einen maximalen oder minimalen Wert zu finden (sogenannte Extremwertaufgaben). Dann muss am Ende ein Antwortsatz geschrieben werden, welcher Wert für den verlangten Sachverhalt in Frage kommt.

Was würde nun passieren, wenn wir versuchen, ein Kunstwerk mithilfe des Schemas einer Kurvendiskussion zu analysieren? Und könnte man den Graphen einer Funktion als Werk sehen und eine Bildanalyse vornehmen? Welche Bilder oder Graphen eignen sich dazu? Versuchen wir es einmal mit folgendem Gemälde: „Bonaparte beim Überschreiten der Alpen am Großen Sankt Bernhard“ von Jacques-Louis David aus dem Jahr 1800 (Abb. 21).

Abb. 21: Bonaparte beim Überschreiten der Alpen am Großen Sankt Bernhard, 1800

Tabelle 4: Bildanalyse vs. Kurvendiskussion: Bonaparte

Bildanalyse	**Kurvendiskussion**
Um welche Gattung handelt es sich? Historienmalerei	*Welchen Grad hat der Graph?* Unterschiedlich
Welche Daten sind vorhanden? (Titel, Künstler, Jahr) Bonaparte beim Überschreiten der Alpen am Großen Sankt Bernhard, Jacques-Louis David, 1800, 259 × 221 cm, Öl auf Leinwand	*In welchem Bereich ist der Graph definiert?* 3394 x 4134 Pixel, 300 dpi, RGB-Farbraum, JPG-Datei
Wie verhält sich der Bildausschnitt? Bonaparte und das Pferd sind komplett abgebildet, der Hintergrund ist abgeschnitten.	*Wo liegen die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen?* Nicht erkennbar.

Gibt es eine oder mehrere Symmetrieachsen im Bild? Nein.	*Ist der Verlauf des Graphen achsen- oder punktsymmetrisch oder keines von beidem?* Keines von beidem.
Welche Punkte im Bild lenken die Aufmerksamkeit des Auges auf sich? Das Gesicht Bonapartes, seine Hände, Accessoires an der Hüfte, der Pferdekopf.	*Wo liegen die Hoch- und Tiefpunkte des Graphen? Gibt es Sattelpunkte?* Ein Hochpunkt könnte am Kopf des Pferdes liegen. Ein Tiefpunkt könnten die Hinterhufe darstellen. Der Sattel des Pferdes könnte ein Sattelpunkt sein.
Gibt es irritierende Punkte, die einen Twist in der Harmonie des Bildes erzeugen? Vielleicht die Gesten Bonapartes.	*Hat der Graph Wendepunkte?* Der Sattelpunkt des Pferdes ist auch ein Wendepunkt.
Gibt es unsichtbare Linien, die die Bildinhalte voneinander trennen oder sich an ihnen orientieren? Durch das Pferd sowie durch die Steinstruktur und Berge im Hintergrund erscheint eine Diagonale Linie von links oben nach rechts unten.	*Hat der Graph Polstellen oder Lücken (Werte, die der Graph nicht annehmen darf)? Und gibt es darum Asymptoten?* Nicht erkennbar.

Die Fragen einer Kurvendiskussion auf ein Bild zu übertragen ist also komplizierter als man zu Anfang meinen möchte. Eine weitere Idee ist es, über das Bild ein paar Graphen zu legen, so dass einige markante Linien des Bildes als Funktionen berechnet werden können (Abb. 22). Das ist vor allem bei Bildern mit klaren Konturen oder gebogenen Linien, an denen sich das Gezeigte orientiert, machbar.

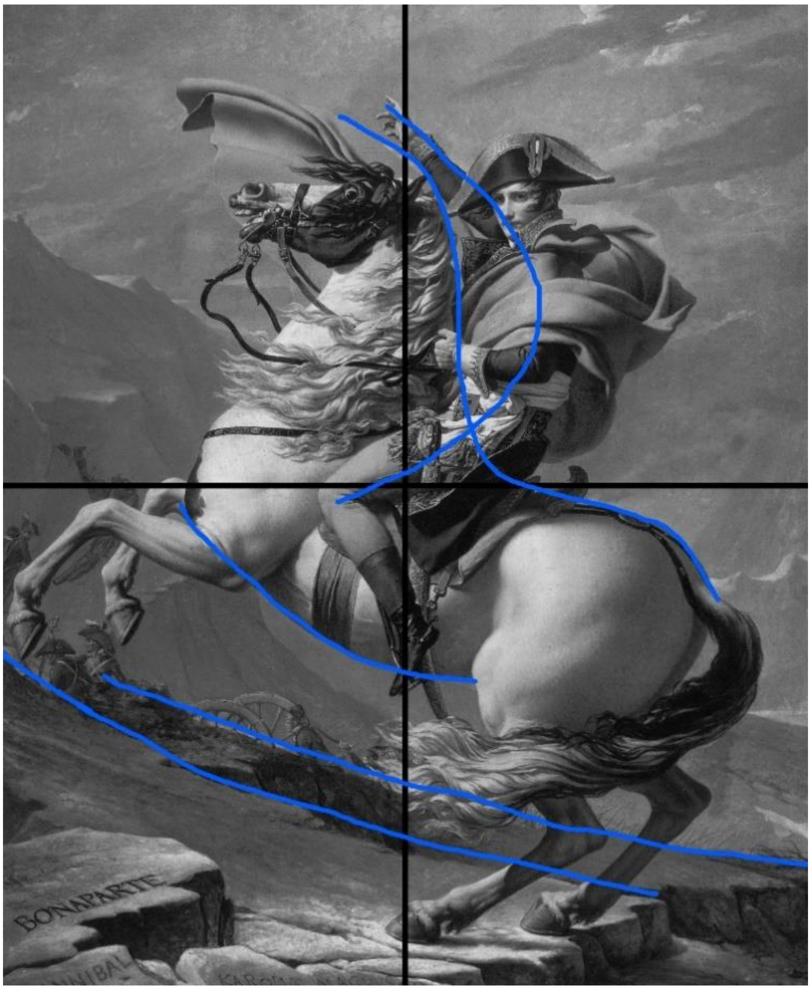


Abb. 22: Bonaparte mit angedeuteten Funktionsgraphen

Aber auch hier tauchen viele Unklarheiten auf. Zumal es schwierig und aufwendig ist, passende Funktionsgleichungen zu finden (man könnte es zum Beispiel mit der Newton-Interpolation versuchen). Letztendlich würde man aber nur weitere Funktionen analysieren, die eigentlich nichts mehr mit dem Bild zu tun haben. Also suche ich nach einer anderen Möglichkeit. Doch zuvor soll das Experiment umgekehrt werden: Kann man einen Funktionsgraphen als Bild behandeln? Der folgende Graph hat die Funktionsgleichung $f(x) = -x^6 - 2x^5 + 2x^4 + 4x^3$.

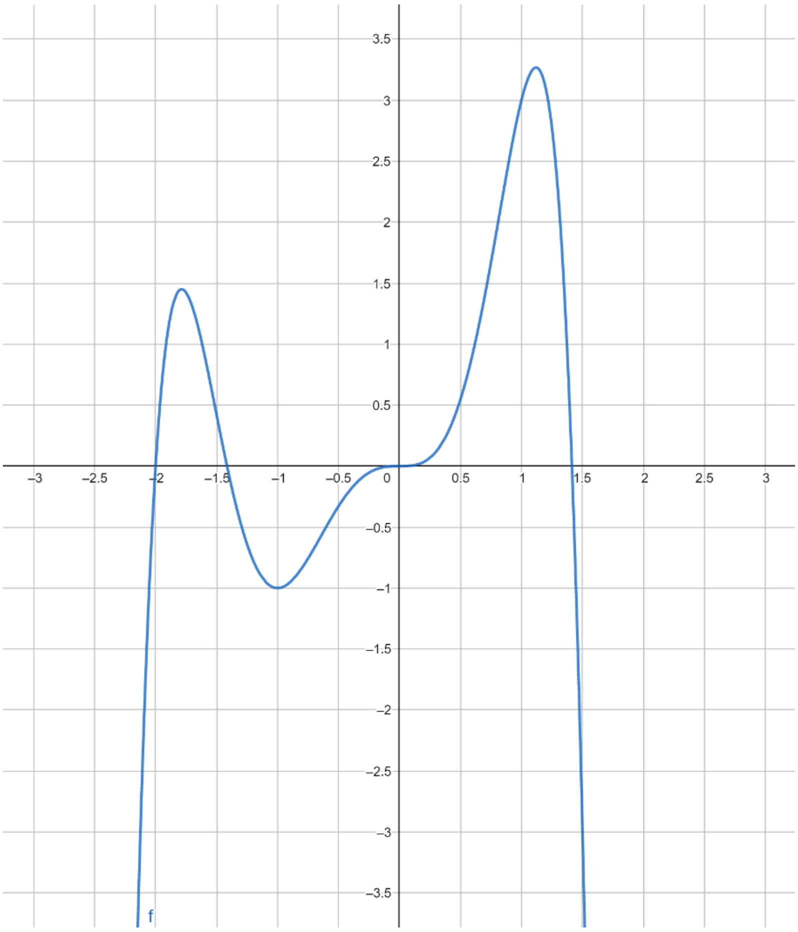


Abb. 23: Funktionsgraph 6. Grades

Tabelle 5: Bildanalyse vs. Kurvendiskussion: Funktionsgraph

Bildanalyse	**Kurvendiskussion**
Um welche Gattung handelt es sich? Funktionsgraph	*Welchen Grad hat der Graph?* 6. Grad
Welche Daten sind vorhanden? (Titel, Künstler, Jahr) „Funktionsgraph 6. Grades“, Ines Brantl, 2021	*In welchem Bereich ist der Graph definiert?* Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$ Wertebereich: $f(x) \in]-\infty; 3{,}27]$
Wie verhält sich der Bildausschnitt? Der Graph ist unten abgeschnitten. Die wichtigen Informationen befinden sich um den Ursprung des Koordinatensystems, welcher im Bildzentrum liegt.	*Wo liegen die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen?* y-Achse: $(0\|0)$ x-Achse: $(-2\|0), (-1{,}41\|0), (0\|0), (1{,}41\|0)$
Gibt es eine oder mehrere Symmetrieachsen im Bild? Nein, gibt es nicht.	*Ist der Verlauf des Graphen achsen- oder punktsymmetrisch oder keines von beidem?* Weder noch.

Welche Punkte im Bild lenken die Aufmerksamkeit des Auges auf sich? Die Extrempunkte sowie der Sattelpunkt im Ursprung.	*Wo liegen die Hoch- und Tiefpunkte des Graphen? Gibt es Sattelpunkte?* Hochpunkte: $(-1{,}79\|1{,}45), (1{,}12\|3{,}27)$ Tiefpunkte: $(-1\|-1)$ Sattelpunkt: $(0\|0)$
Gibt es irritierende Punkte, die einen Twist in der Harmonie des Bildes erzeugen? Der Sattelpunkt im Zentrum.	*Hat der Graph Wendepunkte?* $(-1{,}51\|0{,}49), (-0{,}64\|-0{,}57),$ $(0\|0), (0{,}82\|2{,}08)$
Gibt es unsichtbare Linien, die die Bildinhalte voneinander trennen oder sich an ihnen orientieren? Nein, gibt es nicht.	*Hat der Graph Polstellen oder Lücken (Werte, die der Graph nicht annehmen darf)? Und gibt es darum Asymptoten?* Nein, gibt es nicht.

Eine Kurve mithilfe einer Bildanalyse zu analysieren, scheint schon besser zu funktionieren als umgekehrt. Dazu wird der Funktionsgraph an sich als Bild betrachtet. Dennoch erscheinen die Antworten nicht befriedigend zu sein.

Ein Bild durch eine Kurvendiskussion zu analysieren und – umgekehrt – die Fragen einer Bildanalyse über einem Funktionsgraphen zu beantworten, bringt also viele Schwierigkeiten und Fragen mit sich. Vielleicht muss man etwas allgemeiner vorgehen: Ein Bild mithilfe von Mathematik (nicht speziell Kurvendiskussion) untersuchen und in einer Kurve die Ästhetik suchen.

Mathematik auf ein Bild anwenden

Die Idee, ein Bild mithilfe der Mathematik zu betrachten, wird heutzutage ständig verwendet – im Alltag fällt es uns nur nicht auf. Die digitale Bildverarbeitung ist mit modernen Technologien auch für Laien möglich – wie zum Beispiel bei der Bearbeitung von Fotos mit Mobiltelefon oder Computer. Im Hintergrund dieser Prozesse steht die Informatik, welche Mathematik als Sprache und Basis nutzt. Im Folgenden sollen ein paar Beispiele genannt werden, mit der Frage im Hintergrund: Was passiert, wenn ich Mathematik auf ein Bild anwende?

Farbaufteilung

Eine Art Höhepunkte können wir in der Farbigkeit des Bildes suchen. Mithilfe der Programmiersprache Python kann eine digitale Version eines Gemäldes nach den Maximalwerten einer Farbe untersucht werden. Dazu bindet man die Datei in Python ein und spaltet sie nach Rot, Grün und Blau auf. Natürlich hängt das Ergebnis von der Wahl der Bilddatei ab und damit auch der Größe, Farbigkeit, Qualität etc. Hier wurde das Bild aus Wikipedia verwendet.

Die folgenden Graphiken (Abb. 24) erhält man über die Plattform *Anaconda*. Der zugehörige Code steht im Anhang. Dabei wurde jeder einzelne Pixel der Datei nach ihren Rot-, Grün- und Blauanteilen untersucht. Auf der jeweils nebenstehenden Skala erkennt man die Stärke des Farbanteils von 0 (kein Anteil im Pixel) bis 255 (Maximalanteil im Pixel).

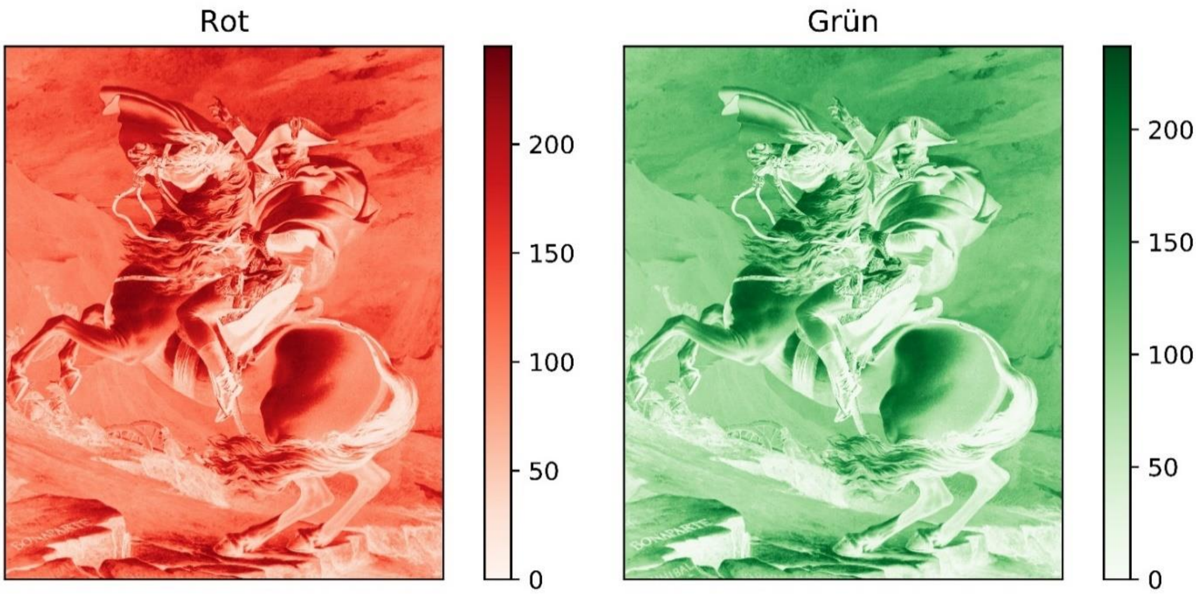


Abb. 24 a und b: Farbaufteilung von Bonaparte

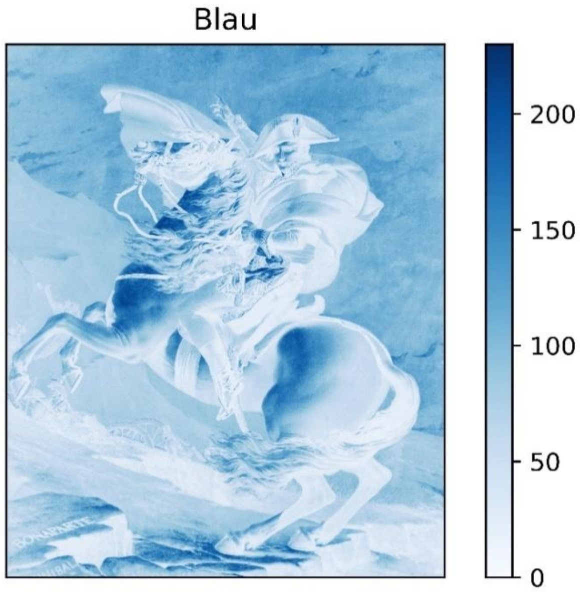


Abb. 25 c: Farbaufteilung von Bonaparte

Werden nun diese drei Bilder überlagert, so entsteht wieder das ursprüngliche Bild im RGB-Farbraum (Abb. 25).

Abb. 26: RGB-Darstellung von Bonaparte

Auf diese Weise kann ein Bild in mathematische Sprache umgewandelt werden. Jeder Pixel ist definiert durch drei Zahlen: Je eine für den Rot-, Grün- und Blauanteil. Diese Zahlen können zum Beispiel in Dualzahlen geschrieben werden und sind somit für einen Computer lesbar. Ein Beispiel: Ein Pixel mit folgenden Farbanteilen:

Tabelle 6: Farbcode-Beispiel eines Pixels

Farbe	Wert	8-stellige Dualzahl
Rot	24	00011000
Grün	142	10001110
Blau	255	11111111

Somit hat der Pixel mit den RGW Werten 24, 142, 255 die Farbnummer 000110001000111011111111 und ist damit eindeutig bestimmt. Auf diese Weise kann ein Bild komplett in mathematische Sprache übersetzt werden.

Nun könnte man sich die einzelnen aufgespalteten Bilder genauer ansehen und zum Beispiel ein Histogramm erstellen, um die Größenanteile der Farben zu veranschaulichen. Bezüglich der Bildanalyse könnte man das mit einem Farbkontrast (zum Beispiel dem Quantitätskontrast) vergleichen.

Fourier-Transformation

Eine weitere Möglichkeit der Bildverarbeitung gelingt mit der Fourier-Transformation (kurz: FT). Das Vorgehen dieser Analyse geht auf den französischen Mathematiker und Physiker Jean Baptiste Joseph Fourier zurück. Damit bereitete er in den 1820er Jahren den Weg für die moderne Physik und Technik. Die FT ist besonders vielseitig und wird als Analysewerkzeug für verschiedene Bereiche der Technik verwendet. Zu diesen gehören „die Analyse der Schwingungen einer Violinsaite oder auch einer Brücke, die Überprüfung der Qualität eines Hi-Fi-Verstärkers, Hochfrequenz-Fouriertransformations-Spektroskopie, optische Fouriertransformations-Spektroskopie, digitale Bildverarbeitung (2- bzw. 3-dimensional)“ (Butz 2011, S.1). Da sie in fast allen Bereichen der Natur- und Ingenieurwissenschaften, wie Physik, Signalverarbeitung und Kryptographie, gebraucht wird, sind die passenden Funktionen bereits in vielen Programmiersprachen eingebettet – was allerdings auch zu Fehlern in der Bedienung oder Interpretation führen kann (vgl. ebd.).

Kurz gesagt, die FT zerlegt ein Signal des realen Raums in dessen einzelne Frequenzanteile. Das funktioniert zum Beispiel mit digitalen Bildern[4], aber auch mit Tonaufnahmen (also mit räumlichen wie zeitlichen Signalen). Eine mögliche anschließende Verwendung, ist das Nutzen verschiedener Filter. Diese werden über ein Bild gelegt, die nur bestimmte Frequenzen durchlassen.

Die Mathematik dahinter

Ein Signal besteht aus einer Kombination von Sinus- und Cosinuskurven mit verschiedenen Frequenzen. Man kann dies als Funktion $f(t)$ bezeichnen – ausgedrückt als Fourierreihe. Um herauszufinden, wie sich genau eine solche Kombination zusammensetzt, wird darauf die FT angewendet. Anschließend kann man die einzelnen Bestandteile erkennen und die unterschiedlichen Frequenzen ablesen – es entsteht die neue Funktion $F(\omega)$. Man sagt, sie wandelt ein Signal vom Raumbereich (engl. *spatial domain*) in den Frequenzbereich (engl. *frequency domain*) um. Mathematisch wird dabei eine Integralfunktion verwendet (je nach Literatur kann sie anders dargestellt sein, hier wurde die Schreibweise von Butz 2011, S.35 übernommen).

Für die (kontinuierliche eindimensionale) FT gilt für die Hintransformation

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt,$$

wohingegen die Rücktransformation (inverse Transformation) durch

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{+i\omega t}\, d\omega$$

gegeben ist.

t steht dabei für die zeitliche beziehungsweise räumliche Komponente, ω bezeichnet die Kreisfrequenz.

Abbildung 26 zeigt die Aufspaltung eines Tonsignals. Die obere blaue Kurve stellt das eingehende Signal da, welches eine Kombination von Sinusfunktionen ist und

[4] Theoretisch funktioniert es auch mit analogen Bildern, indem man in den Brennpunkt der Abbildungslinse eine Blende als Maske einsetzt. In der Röntgenanalyse, speziell bei CDI (coherent diffractive imaging) wird etwas Ähnliches gemacht. Dort stellt man seinen Detektor im Fernfeld von der Probe auf und das Fernfeld entspricht gerade der Fouriertransformierten der Probe. Siehe auch https://www.av.ph.tum.de/Experiment/3000/Beschreibungen/ver3235.php

periodisch wiederholt gesendet wird. Die rote Kurve nach der FT lässt erkennen, dass das Signal aus zwei Sinusfunktionen verschiedener Frequenzen besteht.

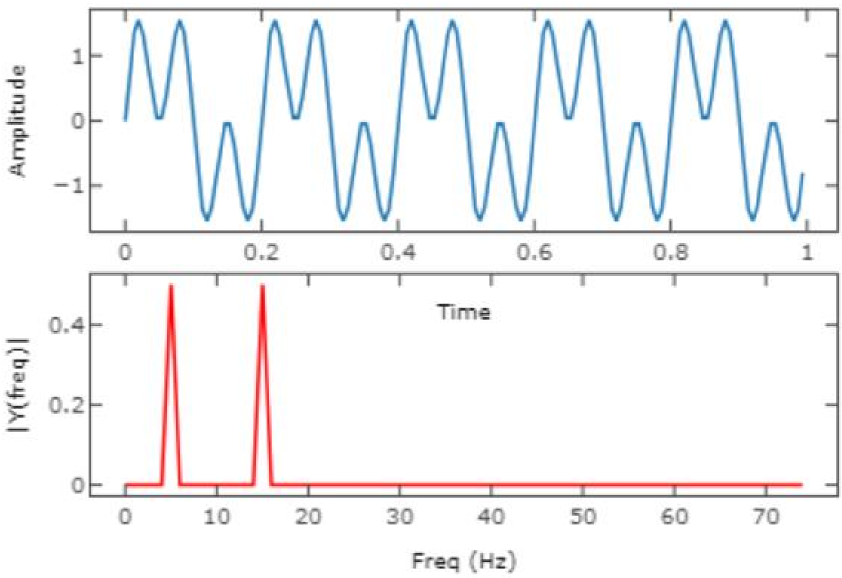


Abb. 27: Veranschaulichung eines Tonsignals vor und nach FT

Ein Beispiel für eine Bildverarbeitung: „Lena[5]" (vgl. Wagner 2015)

Als ein einfaches Bildbeispiel betrachten wir ein Foto von Lena in Graustufen[6] (Abb. 27, links). Als erstes wird die FT darauf angewendet. Man könnte das verstehen als eine Untersuchung der Änderungen zwischen den Grauwerten. Gibt es starke Änderungen bzw. große Kontraste (zum Beispiel von schwarz auf weiß ohne viele Grauwerte dazwischen), so entspricht das einer Kombination aus vielen Frequenzen im Fourierraum und man spricht von hohen Frequenzen. Dabei sind die Sinusfunktionen eher gestaucht. Wenn sich nicht viel ändert, sind die Sinusfunktionen gestreckt und ergeben tiefe Frequenzen. Die Fouriertransformierte des Bildes zeigt eine Sortierung von hohen und tiefen Frequenzen als Grauwerte (Abb. 27, rechts). Die tiefen Frequenzen werden im Bildzentrum angezeigt (helle Stellen), während sich die hohen Frequenzen darum verteilen (dunkel) (vgl. Sinha 2018). Die hellen senkrechten und waagrechten Streifen entstehen durch die FT, da das räumliche Bild periodisch in jede

[5] Das Portraitfoto von Lena Forsén ist eines der meistverbreiteten Testbilder in der Bildverarbeitung.
[6] Farbbilder funktionieren auch, allerdings wird dabei auf jede Farbschicht (rot, grün, blau) die FT einzeln angewendet.

Raumrichtung angehängt wird. Zwischen zwei solchen Bildern treten teilweise scharfe Kanten auf, die durch hohe Frequenzen im Fourierraum dargestellt werden. In dem Beispielbild gibt es vor allem harte Übergänge, wenn man sich die versetzten Bilder in horizontaler und vertikaler Richtung anschaut.

Abb. 28: Original und Fouriertransformierte

Anschließend können verschiedene Filterfunktionen auf die Fouriertransformierte des Bildes angewendet und danach wieder in ein Bild zurücktransformiert werden. Filter in diesem Fall bedeutet, dass eine Maske von derselben Größe wie das Originalbild drübergelegt wird, die nur jene Frequenzinformationen durchlässt, an denen wir interessiert sind (vgl. Sinha 2018).

a) Harter Filter: Kreisblende und Hochpassfilter (Kantenerkennung)

Wir sind nur an den hohen Frequenzen, also an den harten Wechseln von hell auf dunkel interessiert. Die tiefen Frequenzen werden auf Null gesetzt. Auf diese Weise werden die Kanten wie Konturen abgebildet.

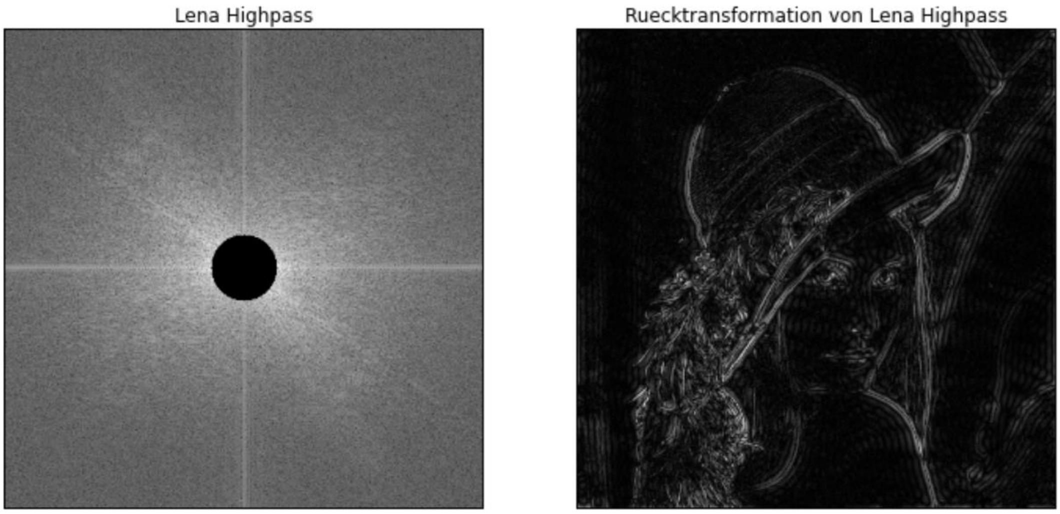


Abb. 29: Hochpassfilter und Rücktransformation

b) Harter Filter: Kreisblende und Tiefpassfilter (Weichzeichnen)

Hierbei werden nur die tiefen Frequenzen, das heißt die weichen Übergänge durch den Filter gelassen und die hohen Frequenzen werden unterdrückt.

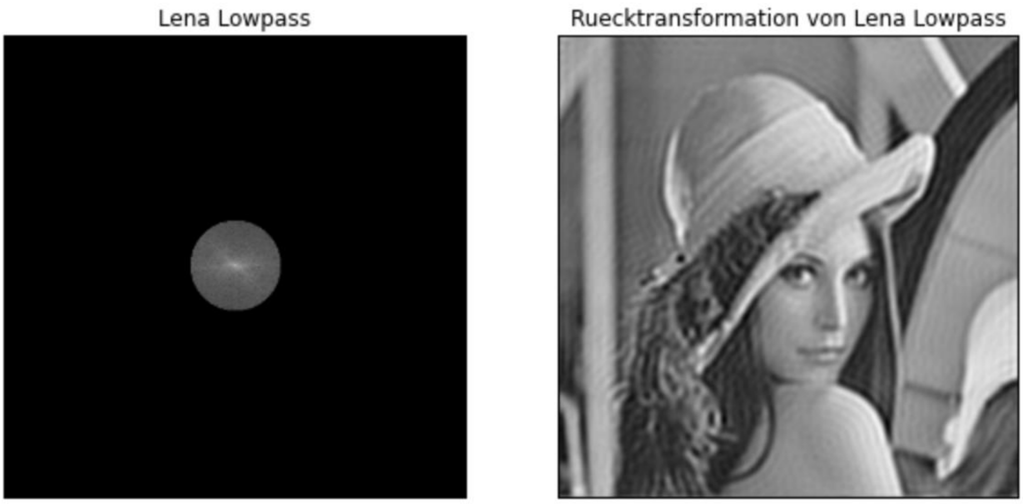


Abb. 30: Tiefpassfilter und Rücktransformation

c) Harter Filter: Kreisblende und Tiefpassfilter mit Gaussfilter (Unschärfefilter)

Der Filter aus b) führt allerdings zu sogenannten Ringing Artefakten (sichtbare, unerwünschte Stellen in digitalen Bildern, die durch die Eigenschaften der verwendeten Technik hervorgerufen wurden, wie Rauschen oder Streifen). Um das zu unterbinden, wird über den Filter noch ein Gaussfilter (Abb. 30) gelegt. Dieser entschärft die Kante der Kreisblende und lässt das Bild unscharf aussehen.

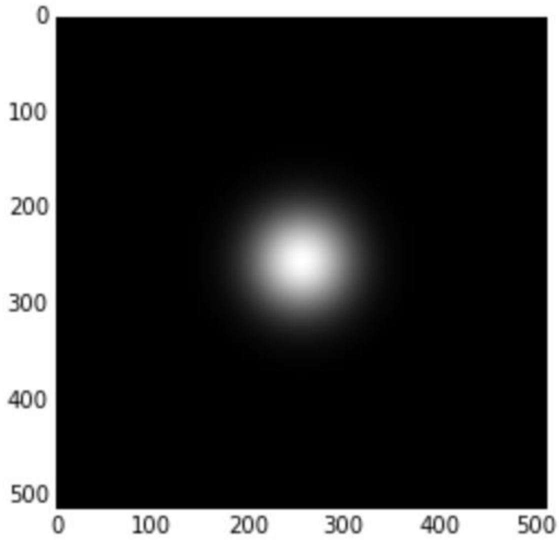


Abb. 31: Gaussfilter

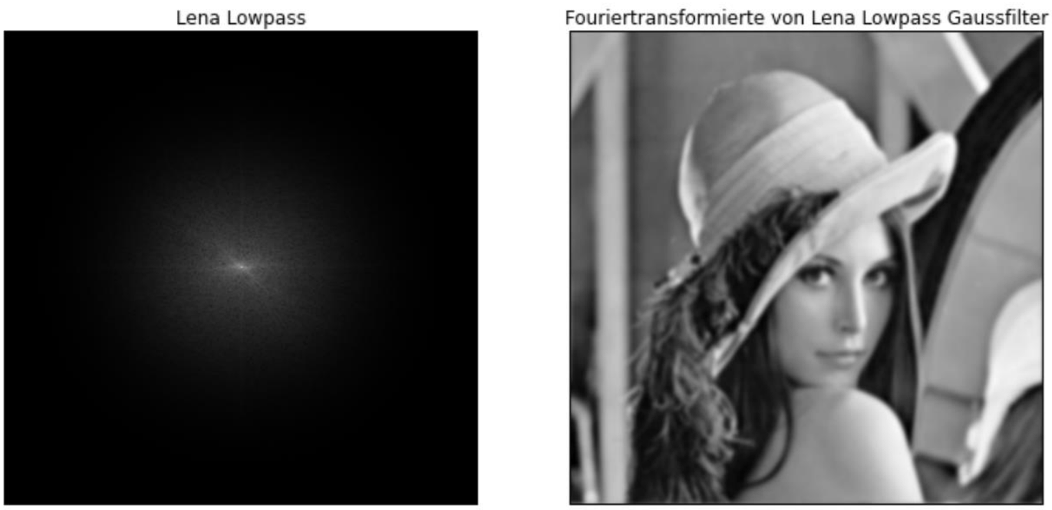


Abb. 32: Tiefpassfilter mit Gaussfilter und Rücktransformation

Es gibt noch weitere Filter. Zum Beispiel kann man einen ringförmigen – den sogenannten Bandpassfilter in Kombination mit einem Gaussfilter – benutzen, um eine mittlere Frequenz herauszufiltern. Diesen kann man auch nutzen, um die oben genannten Artefakte zu entfernen. Bei einer Fotografie, bei der technikbedingte Unschönheiten wie Streifen oder Raster entstehen, tauchen diese in der Fouriertransformierten des Bildes als helle Punkte auf. Durch einen Bandpassfilter können genau diese Punkte übergangen und damit das Bild in der Rücktransformation ausgebessert werden. Allerdings werden dabei auch die anderen Frequenzen, die in dem Ring liegen, unterdrückt.

Man könnte auch direkt über das Bild einen Filter legen. Allerdings erfordert dies mehr Rechenleistung, als wenn man einen Umweg über die FT und ihre Rücktransformation nimmt. Außerdem können die Artefakte wie das Raster nur im Frequenzraum geändert werden, nicht aber, wenn der Gaussfilter direkt auf ein Bild angewendet wird. Die genaue Vorgehensweise der Fourier-Transformation ist um einiges komplizierter und wird in dieser Arbeit nicht weiter erklärt. Weiterführende Informationen zu den rechnerischen Hintergründen gibt es zum Beispiel bei Butz 2011.

Kunst auf eine Kurve anwenden

Parabeln und Geraden allein scheinen für viele in einer Kurvendiskussion wenig ansprechend zu sein. Man könnte vielleicht behaupten, dass die Hoch- und Tiefpunkte eine gewisse Dynamik oder Blickfang entstehen lassen oder es eine unterschiedliche Wirkung zwischen steigenden und fallenden Abschnitten gibt. Aber wirklich interessant wird es erst, wenn mehrere Funktionsgraphen aufeinandertreffen. In diesem Fall könnte man das Zusammenspiel ebenfalls als „Bild" bezeichnen. Es können dann nicht nur mehr Aussagen über das Verhältnis zwischen den Graphen getroffen werden, sondern man kann eventuell Objekte darin erkennen.

Die Internetplattform *Desmos* stellt ein Tool bereit, mithilfe dessen man kleine Kunstwerke allein aus Funktionsgraphen und Geometrischen Flächen erstellen kann. Auf der linken Seite der Applikation stehen Werkzeuge in einer Toolbox bereit. Hier werden Funktionsgleichungen eingegeben, die auf der rechten Seite als Graphiken angezeigt werden. Es ist möglich, die Graphen unterschiedlich einzufärben und Flächen auszufüllen. Man kann sogar Bewegungen simulieren, sodass zum Beispiel ein gezeichneter Hubschrauber von einer Seite des Koordinatensystems zur anderen „fliegt". Auf die unterschiedlichsten Arten nutzten Schülerinnen und Schüler im April 2020 diese Werkzeuge und kreierten damit beeindruckende Bilder. Diese sind auf der Homepage von *Desmos* unter https://www.desmos.com/art?lang=de zu finden. Diese Vorgehensweise kann auch in einem fächerübergreifenden Unterricht Verwendung finden. Dadurch bekommen Schülerinnen und Schüler ein besseres Gefühl für

Funktionsgraphen. Es kann auch per Hand gezeichnet werden, um das Zeichnen an sich zu üben.

Zusammenfassung Kurvendiskussion vs. Bildanalyse

Diese Verbindungen zwischen Mathematik und Kunst beantworten allerdings nicht die Ausgangsfrage, ob man ein Bild mithilfe einer Kurvendiskussion entschlüsseln und eine Bildanalyse auf einen Funktionsgraphen anwenden kann. Bisher konnte ich nur einen Vergleich in der Vorgehensweise, also eine Ähnlichkeit in den Fragestellungen erkennen. Um eine bessere Antwort auf diese Frage zu finden, möchte ich mich auch in Zukunft mit diesem Thema weiterbeschäftigen.

4 Bridges-Konferenz Linz

Es gibt weltweit viele Menschen, die sich für die Überschneidungen von Mathematik und Kunst, aber auch von anderen Wissenschaften, Technologien und diversen Formen der Kunst, interessieren. Eine große Organisation, die sich mit dieser Thematik auseinandersetzt, nennt sich *Bridges*. Sie wurde 1998 von Reza Sarhangi ins Leben gerufen. Seitdem findet jährlich eine Konferenz in den verschiedensten Ländern der Welt statt. Die Bridges Organization verfolgt das Ziel, Forschung, Praxis und neues Interesse an mathematischen Verbindungen zu Kunst, Musik, Architektur, Bildung und Kultur zu fördern.

> „All too often, mathematics can seem disconnected from or even antithetical to these other topics. We believe that mathematics and art can inform and enrich each other, that there are great ideas waiting to be found in mathematical analysis and synthesis of art, and that artistic thinking and activities can enliven the mathematics classroom.“ (Bridges, o.J.)

Bei den Konferenzen sind Vertreter und Vertreterinnen verschiedenster Bereiche anwesend: Mathematik, Wissenschaft, Kunst, Pädagogik, Architektur, Musik, Literatur, Informatik, Bildhauerei, Tanz, Weberei, Modellbau und viele mehr. Das Programm besteht aus Plenarvorträgen, Präsentationen von Forschungsarbeiten, Workshops zum Mitmachen sowie abendliche Veranstaltungen mit Musik, Film, Poesie oder Theater. Außerdem gibt es eine Ausstellung zu visueller Kunst.

Reza Sarhangi, Department of Mathematics (Towson University, Maryland, USA) und Gründer der Bridges Organization, veranstaltete die erste Konferenz 1998 am Southwestern College in Winfield, Kansas. In den folgenden Jahren fanden die Konferenzen auch in Kanada, Europa und Asien statt. Die Teilnehmer kommen ebenfalls aus allen Winkeln der Welt. Sie alle möchten neue Wege gehen, Grenzen überwinden und ihre Vorliebe für mathematisch-künstlerische Zusammenhänge mit anderen Menschen teilen. (vgl. ebd.)

2019 durfte die Stadt Linz in Österreich die Bridges Konferenz beherbergen. Die Plenumsvorträge, Präsentation und Workshops fanden an der Johannes-Kepler-Universität statt. Veranstaltung gab es im Ars Electronica Center sowie der Bruckner-Universität und Tabakfabrik. Im Folgenden sollen nun ein paar Vorträge und Workshops näher beschrieben werden. Vieles stammt direkt aus den Vorträgen und kann schriftlich nicht nachgewiesen werden.

4.1 Helmut Pottmann: Discrete and Computational Differential Geometry for Functional Pattern Design

Bei seinem Vortrag erklärte Helmut Pottmann von der TU Wien wie kurvige oder runde Gebäude so gebaut werden können, dass eine möglichst glatte Oberfläche entsteht, ohne dabei gebogenes Material zu nutzen. Denn würde man die Oberfläche übergangslos rund bauen wollen, müsse man für jedes Einzelteil eine eigene Form gießen beziehungsweise individuell in Form biegen. Da dies aber zu kostspielig ist, versucht man eine solche Fläche durch ebene Formen so zusammenzusetzen, dass die Illusion einer Rundung entsteht. Dies geschieht, indem man zum Beispiel viereckige oder dreieckige Flächen aneinandersetzt. Mithilfe von Computerprogrammen kann das Netz so berechnet werden, dass möglichst wenig Einzelteile oder unterschiedliche Formen gebraucht werden und dabei die Oberfläche möglichst fließend wird. Pottmann gibt dazu einige Beispiele an. Letztendlich stellt er die Idee vor, dass die Verwendung von sechseckigen Grundflächen die optimale Bauweise sei, vor allem mit der Mischung von drei- und viereckigen Teilen. Ohne Computerprogramme sei es jedoch fast unmöglich das passende Netz zu finden. (vgl. Pottmann 2019)

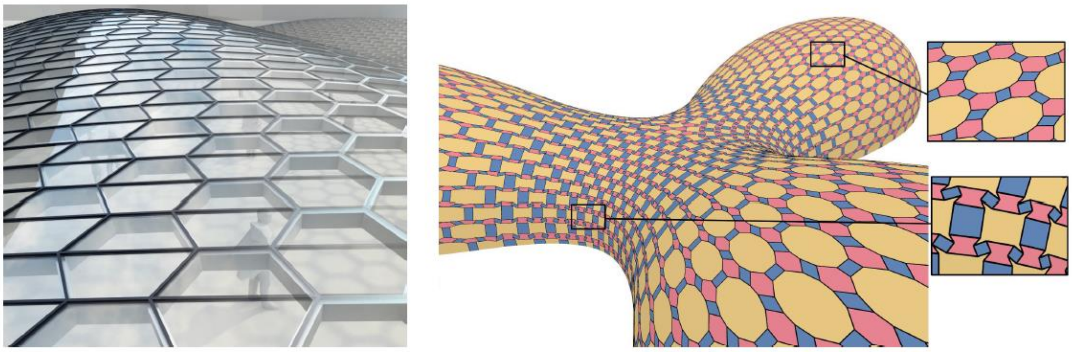


Figure 1: *Polyhedral patterns. Left: A quad mesh needs not look like a curved regular grid. Right: In positively curved areas, the pattern appears like the corresponding semi-regular pattern in the plane, but in negatively curved areas it changes significantly.*

Abb. 33: Gekrümmte Fläche mit verschiedenen Polyedern

4.2 Elisabetta Matsumoto: Twisted Topological Tangles: Or the Knot Theory of Knitting

Schon als Kind hat sich Elisabetta Matsumoto mit dem Stricken beschäftigt. In ihren Arbeiten beschäftigt sie sich mit dem mathematischen Hintergrund hinter den einzelnen Knoten und Schlaufen. Vor allem interessiert sie die Frage, welche Maschen möglich sind. Dazu erstellte sie ein Modell der Grundidee einer Masche, wobei die

Richtungen der Enden der Fäden undefiniert bleiben. Anschließend überlegte sie sich, welche Möglichkeiten es gibt, die Fadenenden miteinander zu verbinden und somit neue Maschenarten zu entwickeln. Außerdem erklärte Matsumoto wie man positiv beziehungsweise negativ gekrümmte Flächen durch Ab- oder Zunahme von Maschen stricken kann. Diese Flächen verglich sie mit Krümmungen in der Natur.

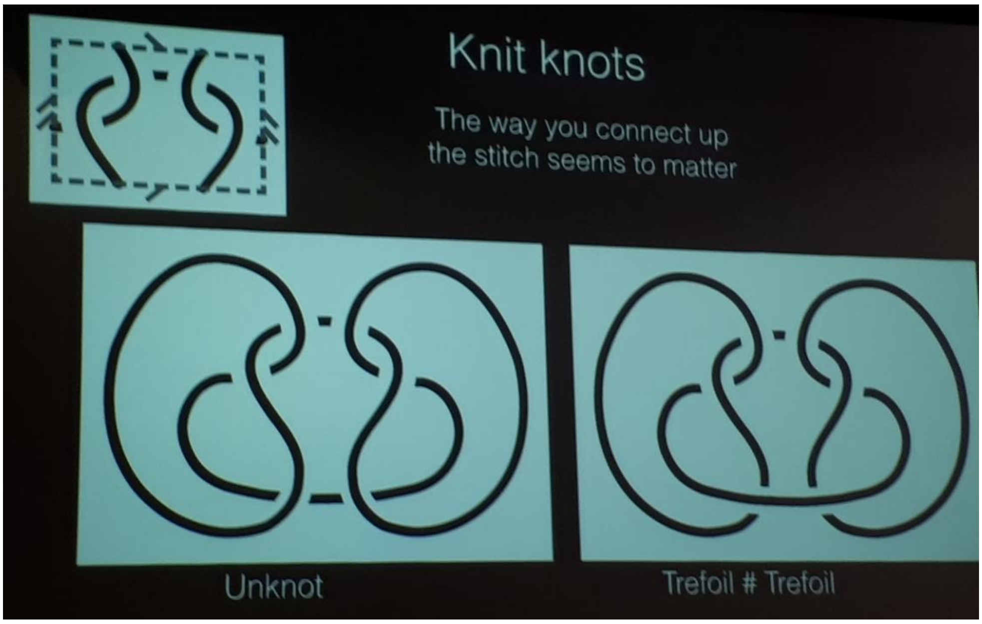


Abb. 34: Schematische Darstellung eines Knotens beim Stricken

4.3 Giulia Bini & Ornella Robutti: Yo Math Is So Arty: Inspiring Creative Learning with Mathemaical Internet Memes

In ihrem Workshop stellten Giulia Bini und Ornella Robutti die folgende Gleichung in den Raum:

MATHS = SCIENCE (*OBSERVATION*) + ART (*IMAGINATION*)

Dazu zeigten sie, wie man Mathematik auf eine künstlerische Art darstellen kann: Mithilfe von Memes. Diese kursieren im Internet sehr häufig. Sie bestehen aus einem Bild und einem kurzen Text. Je nach Situation oder Aussage ist ein anderes Meme-Format zu wählen. Meistens beinhalten sie Ironie oder Sarkasmus. „Memes are like inside jokes between millions of people“, sagte Bini in diesem Workshop. Anschließend zeigten sie uns verschiedene Internetseiten, auf denen man solche Memes selbst erstellen kann. So sollten wir es selbst ausprobieren und dabei eine mathematische Aussage (zum Beispiel ein häufig gemachter Fehler) einbringen. Memes können also

Mathematik auf eine kreative – und meist amüsante – Art umsetzen. (vgl. Bini & Robutti 2019)

(a) (b) (c)

Abb. 35: Beispiele für mathematische Memes

4.4 Briony Thomas, Azael Capetillo, Alejandra Díaz de León, Fabio López & Rafael Machado: A Shape-based Approach to Creativity and Connection Making

Dieser Workshop befasste sich vor allem mit der Frage, ob geometrische Körper für den Alltag so abgewandelt werden können, dass sie dem Menschen von Nutzen sind. Dazu brachten die Vortragenden Papiervorlagen von platonischen Körpern mit, die die Teilnehmenden ausschneiden und mithilfe eines Fadens in ihre dreidimensionale Form bringen sollten. Dadurch, dass sie nicht zusammengeklebt, sondern nur mit dem Faden verbunden waren, konnten sie mühelos von der flachen Form in die räumliche Version gebracht werden. Diese Eigenschaft sollten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer für die kommende Aufgabe nutzen. Dazu folgende Situation: Wir befinden uns in einem ärmlichen Dorf. Verschmutzter Fluss, kein elektrisches Licht, ein langweiliger Dorfplatz. Wir sollen nun helfen, das Dorf zu verschönern oder zu verbessern. Wie können wir die platonischen Körper dazu verwenden und verändern?

In kleinen Gruppen gingen die Teilnehmer*innen dieser Frage nach und entwickelten verschiedene Verwendungsmöglichkeiten (vgl. Thomas et al. 2019):

- Wasserauffangbehälter und -verteiler
- Sitzplätze auf dem Dorfplatz
- Kletter- und Spielgelegenheiten auf einem Spielplatz
- Lampen

- Recyclingcontainer
- Vertical-Garden-Objekte
- Fischfangkörbe
- Stausystem und Müllfänger für den Fluss

Abb. 36: Verwendungsvorschläge für Polyeder

4.5 António Araújo: A Fisheye Gyrograph: Taking Spherical Perspective for a Spin

Man stelle sich vor, alles um einen herum ist auf einer Kugel abgebildet und man befindet sich in deren Zentrum. Um das zeichnerisch auf einem Papier festzuhalten, nutzt der portugiesische Mathematiker António Bandeira Araújo ein rundes Gitter mit gebogenen Linien, welches auf einem Pappkarton geklebt ist (siehe Anhang). Darauf wird ein Transparentpapier mit einem Nagel in der Mitte befestigt, so dass man das Gitter unter dem Papier drehen kann. Die gebogenen Linien entsprechen parallelen Geraden im realen Raum. Diese sind jeweils im Abstand von 5° markiert. Araujo erklärt, dass man beim Zeichnen die Richtlinie „eine ausgestreckte Faust entspricht etwa 10°“ nutzen kann. Somit versuchten die Kursteilnehmer*innen den Raum skizzenhaft zu erfassen.

Diese Art der verzerrten Perspektive wird vor allem für das Zeichnen von Weltkarten[7] verwendet. Araújo entwickelte verschiedene zugrundeliegende Gitter (auch digital zum Beispiel für GeoGebra), um diese für das Zeichnen eines Raumes nutzbar zu machen. Wird das fertige Bild eingescannt und auf Social Media Webseiten wie beispielsweise Facebook hochgeladen, so erkennt die Internetseite dieses Bild als eine 360°-Ansicht und man kann mithilfe des Mauszeigers sich darin umsehen, als wäre das Bild mit einer 360°-Kamera aufgenommen worden. (vgl. Araújo 2019)

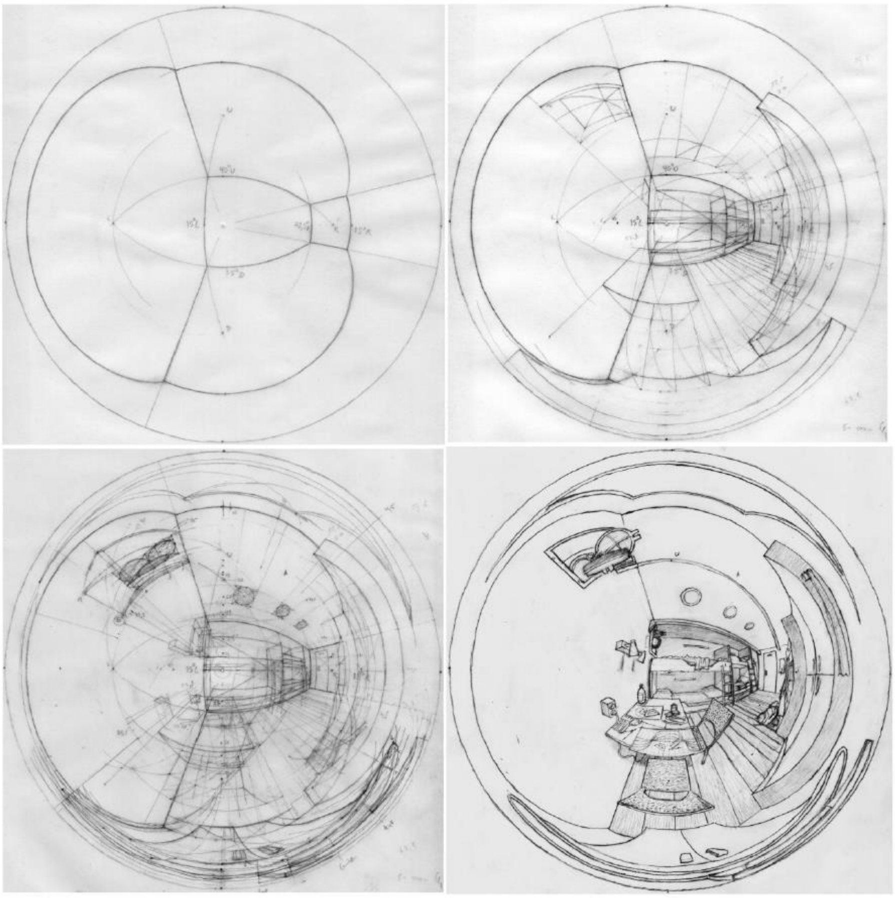


Abb. 37: Fisheye-Perspektive

[7] Entspricht der mittabstandstreuen Azimutalprojektion.

5 Fächerübergreifend in der Schule

Warum sollte in der Schule nun versucht werden, Mathematik und Kunst zu verbinden? Diese Fächer zu verknüpfen ist keine neue Idee. Wie in der Einleitung dieser Arbeit erwähnt, hat sich schon unter anderen Leonardo da Vinci ein breitgefächertes Spektrum an Wissenschaften und Künsten zu Nutze gemacht, um die Welt zu verstehen und ihre Möglichkeiten für eigene Interessen zu nutzen. Es gibt einen englischen Begriff, der dies gut zusammenfasst: STEAM. Dies ist ein Akronym aus Science, Technology, Engineering, Art und Mathematics. Ursprünglich hieß es STEM[8], wobei die Künste noch nicht inbegriffen waren. Zusammen mit sozialen Wissenschaften wie Psychologie gehörte die Kunst zu HASS (Humanities, Arts and Social Sciences) beziehungsweise seit 2020 benannt als SHAPE (Social Sciences, Humanities and the Arts for People and the Economy). STEAM stellt eine Brücke zwischen den Disziplinen dar.

Mathematik kommt ohne Kunst – oder genauer gesagt ohne Visualisierung – nicht aus. Die abstrakten Verhältnisse sind auf Graphen, Zeichnungen und Modelle angewiesen, damit sie verstanden werden können. Gerade in der Schule sind Anschauungsmaterialien unerlässlich, wenn neue Inhalte vermittelt werden sollen. Doch nur ein paar Bilder von Graphen oder geometrischen Objekten im Schulbuch abzudrucken, reicht nicht. Wichtig ist, dass die Schülerinnen und Schüler durch eigene Zeichnungen die mathematischen Zusammenhänge erfahren. Zwar gehört das Zeichnen von Funktionsgraphen in jeden Mathematikunterricht, aber man kann dies noch weiter vertiefen. Beispielsweise ein Funktionsgraph einer Parabel kann auf haptische Weise erfahren werden: Mit Seilen legen, einen Stein in die Luft werfen und beobachten oder Rundungen an Einrichtungsgegenständen suchen (nicht jede Schule kann eine Parabelrutsche wie die der Technischen Universität München bauen). Aber auch künstlerisch-gestalterisch könnte Mathematik veranschaulicht werden. Der Kreativität sollte dabei keine Grenzen gesetzt sein. Denn kreatives Denken fördert den Umgang mit abstrakten Gegebenheiten. Auch brauchen neue Innovationen einen kreativen Geist als Ausgangspunkt.

Genauso auch umgekehrt. In den künstlerischen Fächern kann die sachliche Struktur wie Algorithmen oder reduzierte Darstellungen von Sachverhalten einen Anstoß für

[8] Im Deutschen vergleichbar mit den MINT-Fächern: Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft und Technik.

eine klar strukturierte Herangehensweise an gestalterische Prozesse geben. Eine Kunst, die klaren Regeln folgt, kann ebenso ansprechend sein, wie ein Werk, das im Rahmen subjektiver Affekte entstanden ist.

Mathematik auf eine kreative Art zu behandeln und Kunst nach ihren mathematischen Strukturen zu untersuchen, fördern nicht nur beide Gehirnhälften. Auch kann es manchen Schülerinnen und Schülern einen anderen Zugang zu beiden Fächern vermitteln. Während manche sich mehr für Mathematik interessieren und andere eher in den gestalterischen Fächern aufgehen, kann ein fächerübergreifender Unterricht eine Brücke für alle sein. Damit kann auch die Zielgruppe der verschiedenen Themen erweitert werden.

Ein fächerübergreifender Unterricht kann auch zur Sinnstiftung beitragen. Gerade, wenn noch weitere Schulfächer als nur Mathematik und Kunst zusammengeführt werden. In der Literatur findet man dabei oft eine Unterscheidung zwischen *fachübergreifendem* und *fächerverbindendem* Unterricht. Beim Ersteren wird ein Thema in nur einem Fach behandelt, wird aber mit Beiträgen aus anderen Fächern erweitert. Letzterer stellt ein allgemeines Thema in den Mittelpunkt, welches in verschiedenen Fächern und aus verschiedenen Blickwinkeln betrachtet gleichzeitig behandelt wird. Beide Konzepte führen zu einer ganzheitlichen Betrachtung eines Sachverhalts. Wobei der fächerverbindende Unterricht dieses Ziel noch stärker verfolgt. Ich habe mich dazu entschlossen, diese Arbeit mit „fächerübergreifend" zu betiteln und meine damit jegliche Art der Zusammenschließung von verschiedenen Schulfächern. Die folgenden Unterrichtsvorschläge entsprechen eher dem fachübergreifenden Konzept, da sie überwiegend im Rahmen eines der beiden Fächer Mathematik oder Kunst durchgeführt werden können. Je nach Schulart und Schulklassen (abhängig von Alter, Anzahl, Aufgeschlossenheit, Kooperation mit anderen Lehrkräften, räumliche Gegebenheiten etc.) können die Vorschläge abgewandelt und den jeweiligen Umständen angepasst werden. Dabei kann es auch möglich sein, das fächerverbindende Konzept zu erreichen.

In der Diplomarbeit von Lisa-Maria Kuen wird an dieser Stelle auf den Diskurs zwischen Haupt- und Nebenfächern in Schulen eingegangen sowie die historische Entwicklung von der Antike bis heute geschildert (S. 63-69). Dabei geht sie auch auf die *Sieben Freien Künste* und ihre Bedeutungen ein. Es werden einige Analogien zwischen Mathematik und Kunst aufgezeigt.

6 Unterrichtsbeispiele

In diesem Kapitel werden einige konkrete Vorschläge für einen fächerübergreifenden Unterricht vorgestellt. Manche wurden bereits in einer Schule durchgeführt, andere sind nur Gedankenexperimente. Dabei wird keine konkrete Zielgruppe angegeben. Die Vorschläge können für jede Klassenstufe und Sozialform angepasst werden. Weitere Unterrichtsbeispiele sind in der Arbeit von Lisa-Maria Kuen zu finden (S. 70-84). Sie beschäftigt sich mit der Zentralperspektive in Bezug auf Dürer, der Parkettierung eines Kunstwerks, Konkreter Kunst in Verbindung mit dem Goldenen Schnitt sowie mathematischen Fraktalen.

6.1 Geometrie zum Aufklappen – Pop-Up-Körper für den Mathematikunterricht

Abb. 38: Pop-Up-Modelle

Idee: Um das räumliche Vorstellungsvermögen im Mathematikunterricht zu unterstützen, sind Körpermodelle zum Anschauen und Anfassen unumgänglich. Doch leider sind solche Modelle nicht immer verfügbar. Sie müssen finanziert werden, benötigen viel Stauraum, verstauben im Regal. Man könnte die Modelle selbst bauen. Doch auch das erfordert Zeit, Geld und Platz. Außerdem gehen die Modelle oft beim Transport kaputt, was die hineingesteckte Arbeit zunichtemacht. Eine Lösung für diese Probleme sind Pop-Up-Körper. Sie sind gut zu verstauen, können die verschiedensten Körper darstellen, wiegen nicht viel und sind einfach selbst zu bauen – eine gute Idee für einen praktisch orientierten Unterricht.

Material:

- Schnittvorlagen geometrische Körper (auf 160 g/m² Papier)
- Tonpapier (A5, 250-300 g/m², nach Wunsch in verschiedenen Farben)
- Schere, Kleber, Lineal, Kugelschreiber

Dauer: pro Pop-Up-Modell 20-30 Minuten

Vorgangsweise: Es ist von Vorteil, wenn die Lehrperson alle Modelle erst einmal selbst baut. So erkennt sie mögliche Schwierigkeiten und kann den Schüler*innen bei Fragen und der Umsetzung helfen. Diese fertigen Modelle können in der Klasse aufgestellt werden. Die Schüler*innen können sich nun ein Modell aussuchen, die dazugehörige Faltvorlage nehmen und mithilfe einer Anleitung das Modell selbst zusammenbauen. Anschließend wird das Modell so auf eine Karte aus Tonpapier geklebt, dass es sich zusammenklappen und wieder entfalten lässt. Neben das Modell können nun der Name sowie Eigenschaften (zum Beispiel Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen, Formeln von Volumen und Oberfläche, …) des geometrischen Körpers geschrieben werden.

Varianten:

- Die Modelle können als Grundlage für die Darstellung in Schrägbildern genutzt werden.
- Anhand dieser Modelle kann der Euler´sche Polyedersatz erklärt und getestet werden.

Pädagogischer Nutzen: Mithilfe dieser Pop-Up-Körper kann im Mathematikunterricht das Thema der Raumgeometrie an praktischen Beispielen erklärt werden. Außerdem werden die feinmotorischen Fähigkeiten trainiert. Die Zusammenarbeit von Hand und Kopf wird gefördert.

Verbindung zum Mathematik- und Kunstunterricht: Die Verbindung zu Mathematik ist offensichtlich. Das Thema Raumgeometrie ist fester Bestandteil des Lehrplans. Schon ab der 5. Jahrgangsstufe gehören das Arbeiten mit geometrischen Körpern zu den Schwerpunkten. Dabei steigt die Komplexität über die Jahre an. Diese

Pop-Up-Modelle können schon sehr früh erstellt werden und im Laufe der Schulzeit um weitere Eigenschaften oder andere Modelle ergänzt werden.

Für den Kunstunterricht spielt die Technik eine Rolle. Pop-Up-Karten oder Faltschnittkarten werden gerne im Gestaltungsunterricht verwendet, um Grußkarten oder dreidimensionale Bilder zu erstellen. Allerdings wird dabei meist eine etwas andere Technik benutzt als für die obigen geometrischen Körper. Faltschnittkarten erstellt man, indem ein Papier an bestimmten Linien eingeschnitten oder gefaltet wird. Beim Auf- und Zuklappen des Papieres treten dann bestimmte Elemente in den Vordergrund und die Karte bekommt einen dreidimensionalen Eindruck. Diese Technik wird auch Kirigami (jap.: *kiri* für „Schneiden“, *kami* für „Papier“) genannt.

Künstler zu diesem Thema: Peter Dahmen: Diplom-Designer, Papierkünstler

Anmerkungen oder weiterführendes Material:
Zeitschriften:

- Mathematik lehren – Gerd Richter, Karin Richter: Geometrie zum Klappen. Platonische Körper enthüllen ihre Symmetrie. Heft 181, 2013
- Mathe Welt – Das Schülerarbeitsheft: Von der Ebene in den Raum. Figuren und Körper. Heft 190, 2015.

Schnittvorlagen und ausführliche Beschreibung online unter https://www.geogebra.org/m/pdfjpw2t.

6.2 Objektstudium – Goldener Schnitt

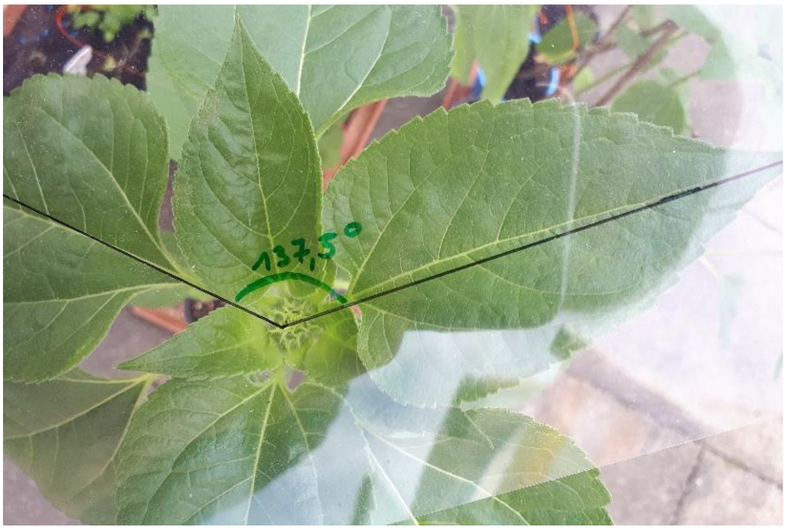


Abb. 39: Sonnenblumenblätter im Goldenen Winkel

Idee: Der Goldene Schnitt findet sich an sehr vielen Stellen – vor allem in der Natur. Um ihn besser verstehen zu können, bietet sich eine Objektstudie an. Dazu sollen verschiedene Gegenstände aus der Natur – wie Muscheln, Sonnenblumen oder Tiere – auf ihre Proportionen untersucht und anschließend in Zeichnungen festgehalten werden.

Material:

- Zeichenpapier, Zeichenstifte oder Malutensilien
- Klarsichtfolie mit eingezeichnetem 137,5°-Winkel (Abb. 38) und/oder Fibonacci-Spirale
- Gummiband mit eingezeichnetem Goldenen Schnitt
- Evtl. passende Objekte wie Muscheln, Sonnenblumenköpfe, Tannenzapfen

Dauer: 2 bis 3 Doppelstunden

Vorgangsweise: Die Unterrichtseinheit kann damit begonnen werden, dass die Lehrperson den Goldenen Schnitt vorstellt und erklärt. Dabei kann der Radiobeitrag von Bayern 2 „Der Goldene Schnitt“ (vgl. Brzoska 2015) sowie deren Material verwendet werden. Anschließend wird der Goldene Schnitt mathematisch erarbeitet, zum Beispiel durch Berechnung der Fibonacci-Folge, sowie durch verschiedene Konstruktionsversuche veranschaulicht (beispielsweise mit der Konstruktionsanleitung aus Kapitel 3.3, die Schüler*innen können aber auch selbstständig nach Möglichkeiten suchen). Diese Konstruktionen können nun auf die Klarsichtfolien und Gummibänder übertragen werden.

Mithilfe der gestalteten Materialien können sich die Schüler*innen auf die Suche nach Objekten – zum Beispiel in der Natur – machen, welche den Goldenen Schnitt aufweisen. Die Folien können sie über Objekte halten und sie mit dem eingezeichneten Goldenen Winkel beziehungsweise der Spirale abgleichen. Das Gummiband kann gedehnt und an ein Objekt zum Vergleich herangehalten werden. Das Verhältnis der gekennzeichneten Längen sollte sich durch die Dehnung nicht ändern. Die gefundenen Objekte werden anschließend in verschiedenen grafischen oder malerischen Studien auf Papier festgehalten. Dabei kann der Goldenen Schnitt beziehungsweise Spirale, Winkel, Rechteck etc. ebenfalls eingezeichnet werden.

Zum Abschluss können verschiedene Kunstwerke wie Dürers Selbstbildnis, Statuen der Antike oder Bauwerke auf ihr Goldenes Verhältnis untersucht werden. Dabei sollte darauf aufmerksam gemacht werden, dass der Goldene Schnitt oft von der betrachtenden Person in ein Werk hineininterpretiert wird, ohne dass der Künstler oder die Künstlerin dies beabsichtigt hatte. Da der Goldene Schnitt auf den Menschen sehr harmonisch wirkt, entstehen solche Verhältnisse auch durch Zufall.

Varianten: Den Goldenen Schnitt in der Natur zu suchen, kann auch als gegenteiliges Beispiel zur konkreten Kunst genutzt werden, woraufhin Bilder wie jene von Jo Niemeyer erstellt werden sollen.

Pädagogischer Nutzen: Viele Schülerinnen und Schüler fragen sich, wozu sie mathematische Sachverhalte erlernen müssen. Eine Veranschaulichung aus einem anderen Schulfach kann Klarheit schaffen. Außerdem wird dadurch ein abstraktes Konzept praktisch erfahrbar gemacht. Besonders spannend kann dabei die forschende Herangehensweise bei der Herleitung des Goldenen Schnitts sein. Das genaue Betrachten der Natur schult die Beobachtungsfähigkeit der Lernenden. Zusätzlich ist diese Aufgabenstellung eine gute Zeichenübung für naturalistisches Abbilden.

Verbindung zum Mathematik- und Kunstunterricht: Der Goldene Schnitt selbst ist in beiden Fächern enthalten. Zum Mathematikunterricht kommen noch die Fibonacci-Reihe sowie die geometrische Konstruktion mit Zirkel und Lineal. Im Kunstunterricht kann dieses Unterrichtskonzept zum Thema Objektstudium sowie Werkanalyse herangezogen werden.

Künstler zu diesem Thema: Le Corbusier: Modulor; Günther Kaphammel: Aquarellstudien zum Goldenen Schnitt https://kaphammel.de/der-goldene-schnitt/

6.3 Perspektiven – Fisheye

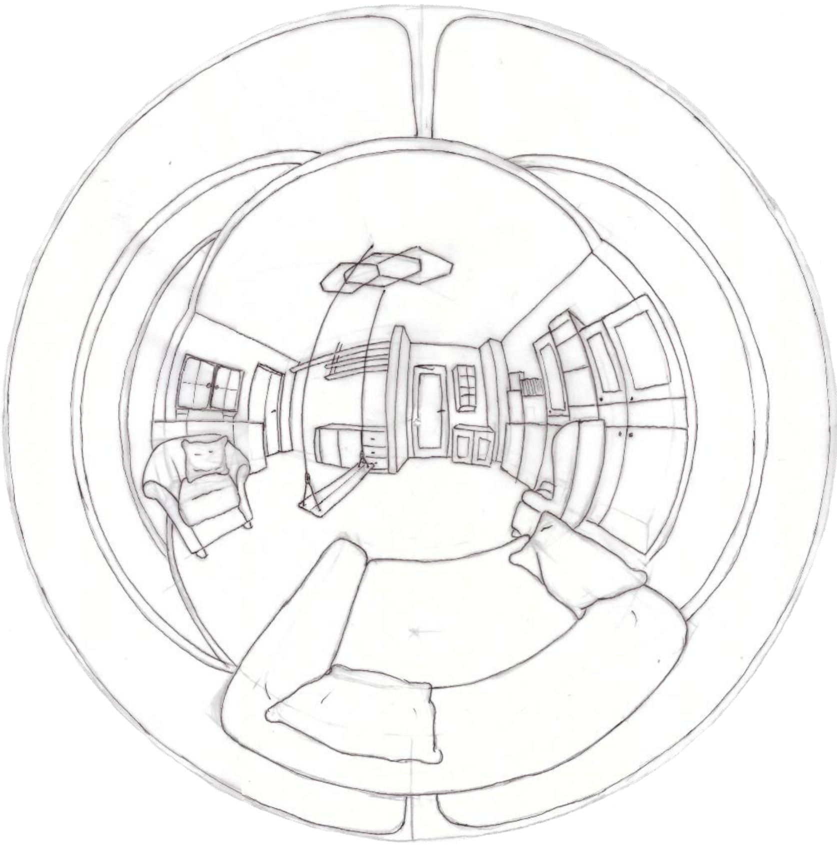


Abb. 40: Fisheye-Perspektiven-Skizze

Idee: Fluchtpunktperspektiven mit ein bis drei Fluchtpunkten lernen die meisten Schülerinnen und Schüler im Laufe ihrer Schulzeit kennen. Aber ein 360°-Bild zu zeichnen können nur die wenigsten. Wie im Kapitel 5.5 erklärt, wird mithilfe eines Gitters ein Raum so gezeichnet, dass der komplette Raum auf einer Kreisfläche zu sehen ist.

Material:

- Transparentpapiere
- Bleistifte
- Ausgedrucktes Gitter und Karton zum Aufkleben
- Reißnägel und Knetgummi (zum Befestigen und damit der Nagel niemanden verletzt)

Dauer: 4 bis 6 Unterrichtseinheiten

Vorgangsweise: Die Einleitung kann so gestaltet sein, dass man zum Beispiel auf Google Maps die Streetview verwendet oder ein passendes Video in YouTube sucht, um ein 360°-Bild zu zeigen. Anschließend sollte ein solches Bild danach analysiert werden, ob es Fluchtpunkte gibt und wo diese liegen. Ein Kugelmodell könnte hilfreich sein.

So funktioniert das Gitter:
Das Gitter besteht aus einem großen Kreis mit einem kleineren im Zentrum. Je die Hälfte der beiden Kreise ist mit 17 gebogenen Linien in verschiedenen Farben gefüllt. Ein weiteres Viertel enthält gerade Strecken, mit dem Kreismittelpunkt als Fluchtpunkt. Ihr Abstand beträgt 5° im realen Raum. Mit der Faustregel „eine ausgestreckte Faust (Länge zwischen kleinem Finger und Zeigefinger bei ausgestrecktem Arm) entspricht etwa 10°“ können Abstände abgeschätzt werden (sowohl waagrecht als auch senkrecht). Wichtig dabei ist, vom selben Platz aus zu messen. Darüber hinaus sind zwei senkrechte Linien eingezeichnet, die die Kreise in Viertel teilen (wie ein Fadenkreuz).

Um einen Raum zu zeichnen, setzt man sich am besten parallel zu einer Wand. Die horizontalen und vertikalen parallelen Geraden der gegenüberliegenden Wand werden mit den gebogenen Linien des Gitters dargestellt. Die waagrechten Geraden der seitlichen Wände werden mit den Strahlen im Kreis gezeichnet. Mit dem inneren Kreis wird alles gezeichnet, was auf der „vorderen Halbkugel“ liegt. Das heißt, breitet man seine Arme nach rechts und links aus und spannt somit einen 180°-Raum vor sich auf, so kann man die Grenzen des vorderen Raums erahnen. Alles was hinter einem liegt – also im hinteren 180°-Raum – wird mithilfe des äußeren Kreises gezeichnet.

Man legt nun ein quadratisches oder rundes Transparentpapier auf das Gitter und befestigt dieses von hinten mit einem Reißnagel in der Mitte. Auf der Vorderseite sollte ein Stück Knetmasse auf den durchgestochenen Nagel gesteckt werden, um Verletzungen zu vermeiden. Bevor man mit dem Zeichnen beginnt, sollten die Schnittstellen des äußeren Kreises mit dem Fadenkreuz markiert werden, um die Zeichnung bei Bedarf wieder ausrichten zu können.

Man beginnt die Zeichnung mit den Umrissen des Raumes. Dazu wird zuerst die gegenüberliegende Wand nach oben, unten und zur Seite in etwa mit der Faustregel ausgemessen und mit den Linien des inneren Kreises des Gitters eingezeichnet. Von den Eckpunkten der Wand werden mit den Strahlen der Kreise (man muss zwischen kleinem und großem Kreis wechseln) gezeichnet. Die Länge hängt davon ab, wie weit die Wand hinter einem weitergeht. Dann werden die neuen Ecken wieder mit gekrümmten

Linien verbunden. Ausgehend von diesem Quader kann nun der restliche Raum weitergearbeitet werden.

Varianten: Wenn mehr Zeit zur Verfügung steht, kann das Gitter auch mit den Schülerinnen und Schülern gemeinsam erarbeitet werden. Außerdem kann man die Unterrichtssequenz in den öffentlichen Raum verlegen.

Pädagogischer Nutzen: Diese Art der Perspektive fordert sehr stark das räumliche Denken und das genaue Beobachten. Auch die Vorstellungskraft wird gebraucht, um die Perspektive zeichnerisch umsetzen zu können.

Verbindung zum Mathematik- und Kunstunterricht: Das dieses Thema zu Perspektiven passt, ist offensichtlich. Es können als ähnliche Beispiele auch Spiegelungen auf gekrümmten Flächen (wie zum Beispiel „Die Arnolfini-Hochzeit" von Jan van Eyck) gezeigt werden. Da diese Perspektive auf Verzerrungen beruht, kann die mathematische Kartografie herangezogen werden.

Künstler zu diesem Thema: António Bandeira Araújo; M. C. Escher: „Hand mit spiegelnder Kugel" (1935)

Anmerkungen oder weiterführendes Material: Eine ausführliche Beschreibung des Gitters sowie dessen Entstehung ist im Bridges-Paper von Antonio Araujo und auf seiner Homepage zu finden. Eine GeoGebra-Zeichenhilfe des Gitters steht unter folgender URL zur Verfügung: https://www.geogebra.org/m/z57ws2bn mit einer Erklärung unter http://www.univ-ab.pt/~aaraujo/full360.html.

Araújo hat auch ein Gitter für eine Rektangularprojektion (engl.: *equirectangular spherical perspective*) entwickelt, welche ebenfalls interessant zu zeichnen ist.

6.4 Mathematik fotografieren

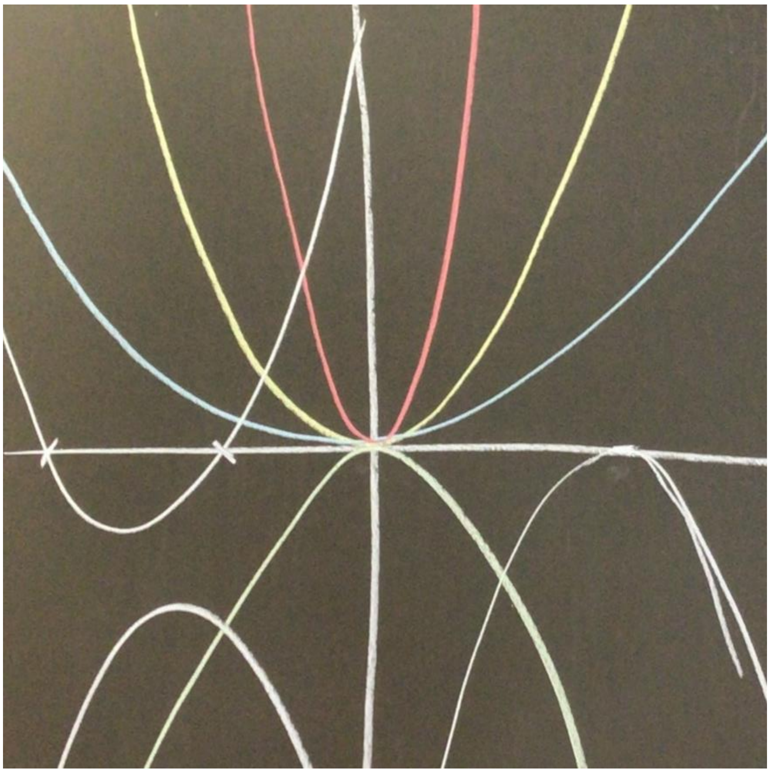


Abb. 41: Mathematisches Tafelbild

Idee: Kann Mathematik schön sein? Warum nicht! Formeln und Gleichungen, die an der Tafel stehen, müssen nicht immer langweilig sein. Im Gegenteil: Manche finden in ihnen eine gewisse Ästhetik. Gerade wenn das, was zuvor auf der Tafel stand und nun verwischt im Hintergrund liegt, eine Struktur unter das Geschriebene legt, kann das Tafelbild interessant werden. Genauso Erklärungen und Verweise in verschiedenen Farben oder die klare Zeichnung einer geometrischen Form. Manches Mal ist es beinah traurig, wenn die Tafel gesäubert wird. Darum könnten die schönsten und interessantesten Tafelbilder abfotografiert werden. Oft erkennt man erst die Schönheit einer Struktur, wenn sie vom eigentlichen Objekt und Umfeld getrennt betrachtet wird.

Material:

- Kameras oder Smartphones
- Computer mit Grafikprogrammen

Dauer: beliebig

Vorgangsweise: Den Schülerinnen und Schülern wird der Auftrag gegeben, innerhalb einer bestimmten Zeitspanne (zum Beispiel einer Woche oder auch ein halbes Jahr), im Mathematikunterricht nach ästhetisch ansprechenden Tafelbildern Ausschau zu halten. Diese sollen dann fotografisch festgehalten werden. Dabei kann die gesamte Tafel oder auch nur ein kleiner Ausschnitt erfasst werden.

Die entstandenen Fotos werden dann im Kunstunterricht mithilfe von Bildbearbeitungsprogrammen weiterverarbeitet. Zum Beispiel können sie am Computer mit passenden Grafikprogrammen gespiegelt, verdoppelt oder anders skaliert werden. Daraus entstehen faszinierende Bilder wie in einem Kaleidoskop. Die Symmetrie als Ordnungsfaktor sollte dabei angesprochen werden. Oder die Fotografien werden als Hintergrundbilder für Projekte wie Plakate oder einen Jahresbericht aufbereitet.

Varianten: Die Aufgabe kann auch auf die handschriftlichen Unterlagen wie Hefteinträge der Schülerinnen und Schüler ausgeweitet werden.

Pädagogischer Nutzen: Hierbei wird der Blick für Ästhetik geschärft. Außerdem werden (hoffentlich) einige Schülerinnen und Schüler mit dieser Aufgabe aufmerksamer dem Mathematikunterricht folgen.

Verbindung zum Mathematik- und Kunstunterricht: Eine Verbindung zur Mathematik besteht nur im Motiv. Für Gestaltungsfächer wie Medien ist die Verarbeitung interessant.

Künstler zu diesem Thema: Wynne, J., Süddeutsche Zeitung Magazin, Nr. 1 2020. Seite 18-25.

6.5 Zufallskunst

Abb. 42: Zufallskunst mit Würfeln

Idee: Eine Kunst, die menschlichen Überlegungen folgt, kann perfekt und harmonisch sein. Doch was passiert, wenn man die Gestaltung dem Zufall überlässt? Oft ist es so, dass in einem strukturierten Werk gerade eine Stelle ins Auge springt, die durch Zufall entstanden ist. Ein Farbverlauf, Farbspritzer oder die Auswahl der Farben selbst – genau das kann zum spannenden Höhepunkt in einem Bild werden. Es gibt auch Projekte, die rein nach dem Zufallsprinzip aufgebaut sind. Um solche Wege zu entdecken, die bewusst auf subjektive Entscheidungen verzichtet und die Art der Gestaltung dem Zufall überlässt, bieten sich verschiedene Experimente an.

Material:

- Würfel, Münzen
- verschiedene Mal- und Zeichenutensilien

Dauer: mind. 4 Unterrichtseinheiten

Vorgangsweise: Dieses Thema bietet sich vor allem dann an, wenn im Mathematikunterricht das Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt wird. Die besprochenen Erkenntnisse können im Kunstunterricht praktisch erfahren werden. Zunächst sollte zwischen zwei Konzepten unterschieden werden: dem *erratischen Zufall* (die Wahrscheinlichkeit und das Ergebnis sind unkalkulierbar) und dem *aleatorischen/probabilistischen Zufall* (das Ergebnis ist zwar nicht vorhersehbar, aber die Wahrscheinlichkeiten können rechnerisch ermittelt werden). Ersterer ist zwar sehr spannend und birgt viele Varianten, ist aber nicht interessant in Bezug auf Mathematik. Darum wird für diese Unterrichtssequenz das zweite Konzept herangezogen.

Ziel dieser Einheit ist es, Wahrscheinlichkeiten bildlich darzustellen. Wirft man zum Beispiel zwei Würfel gleichzeitig, so ist es am wahrscheinlichsten, dass die Summe der Würfelaugen 7 ergibt. Am unwahrscheinlichsten wird eine 2 oder 12 gewürfelt. Oft wird dies im Mathematikunterricht in einer Stichprobe von den Schülerinnen und Schülern selbst ermittelt und anschließend eine Tabelle mit den Wahrscheinlichkeiten erstellt. Man kann statt einer Tabelle aber auch eine kreative Darstellung wählen. Zum Beispiel kann ein quadratischer Maluntergrund in 10x10 Kästchen unterteilt werden. Dann werden den möglichen Würfelergebnissen, also 2 bis 12, unterschiedliche Farben zugeordnet. Wenn nun die beiden Würfel geworfen werden, so wird ein Kästchen nach dem anderen in der getroffenen Farbe ausgefüllt. Ob am Schluss die Farbe der Nummer 7 am häufigsten zu sehen ist, kann natürlich nicht garantiert werden. Aber auf diese Weise stellen die Lernenden fest, wie in etwa eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zustande kommt.

Es bietet sich an, dass die Schülerinnen und Schüler selbstständig Ideen und Experimente entwickeln, wie solche Zufallsbilder entstehen können. Dies kann sehr gut in Kleingruppen oder Partnerarbeit stattfinden. Dazu sollen sie sich ein passendes Objekt (Würfel, Münzen, Bälle etc.) suchen, das durch Werfen oder Ziehen einer Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann. Außerdem bedarf es Regeln, welches Ergebnis wie dargestellt werden soll. Wird die Zuordnung der Farben oder die Reihenfolge der Kästchen dabei ebenfalls durch Zufall bestimmt? Wer darf Würfeln/Ziehen? Wie wird das Ergebnis festgehalten? Wird ein Raster verwendet oder ein ganz anderes System? Wie könnte ein „Malen-nach-Zahlen-Bild“ aussehen mit anders zugeordneten Farben? Solche Fragen können die Kleingruppen unter sich klären. Bei der Präsentation/Ausstellung der Arbeiten sollten diese Regeln und die Vorgangsweise ebenfalls veröffentlicht werden.

Die Stunde könnte auch wie ein Stationenbetrieb oder ein offener Malspielplatz geplant werden, wobei die Schülerinnen und Schüler verschiedene Techniken und Methoden ausprobieren können. Wenn mehrere Bilder durch dieselbe Technik entstehen, so ergibt dies eine noch aussagekräftigere Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Varianten: Aus den entstandenen Bildern könnten zum Beispiel Brettspiele weiterentwickelt werden. Auch kann man diese Unterrichtseinheit dazu verwenden, verschiedene Mal- und Zeichentechniken kennenzulernen. Zum Beispiel kann dabei Ölfarbe verwendet werden, wobei die Lernenden ein Gefühl für die Beschaffenheit des Materials bekommen. Die Aufgabe kann auch ein Anlass für das Üben von Farbmischungen sein, wobei die Kästchen in Helligkeitsabstufungen einer Grundfarbe ausgefüllt werden.

Pädagogischer Nutzen: Das kreative Denken wird angeregt, um passende Experimente zu finden. Außerdem spielt die haptische und optische Erfahrung mathematischer Zusammenhänge eine prägende Rolle.

Verbindung zum Mathematik- und Kunstunterricht: Die mathematische Verbindung ist offensichtlich, da es inhaltlich um Zufalls- und Wahrscheinlichkeitsrechnung geht. Es kann auch mit Statistik weitergearbeitet werden. Für Gestaltungsfächer ist die Verarbeitung, das heißt die gestalterischen Mittel und Techniken, relevant. Auch gibt es einige interessante Künstler*innen, die zu diesem Thema gearbeitet haben.

Künstler zu diesem Thema: Gerhard Richter: 4096 Farben; John Cage: Where R = Ryoanji; Weitere Künstler aufgelistet unter https://www.stefan-huschens.de/probart/zufall-und-wahrscheinlichkeit-in-der-kunst/

Anmerkungen oder weiterführendes Material: Ausstellung: "Purer Zufall. Unvorhersehbares von Marcel Duchamp bis Gerhard Richter" im Sprengel Museum in Hannover, 2014 https://www.haz.de/Nachrichten/Kultur/Uebersicht/Ausstellung-Purer-Zufall-im-Sprengel-Musem

7 Schluss

Mathematik und Kunst zu verbinden ist keine neue Idee. Schon in der Antike und vor allem in der Renaissance gab es Gelehrte, die ihre Arbeit interdisziplinär gestalteten. Die beiden Bereiche haben viele Schnittstellen – viele wurden im Laufe der Zeit aber vergessen oder verdrängt. Das Wissen darüber wieder aufleben zu lassen, hilft uns eine ganzheitliche Betrachtung unserer Umwelt zu erlangen. Gerade in Verbindung mit weiteren Schulfächern und wissenschaftlichen Disziplinen kann dieses Ziel gelingen. Es muss zwar nicht jede*r einzelne von uns Menschen ein Universalgenie oder Polyhistor werden, aber vielfach interessiert und informiert zu sein, kann unsere Gesellschaft in eine wünschenswerte Zukunft leiten.

Man könnte nach der Essenz beider Bereiche suchen. Für mich bedeutet Kunst auf ein einziges Wort reduziert „Kreativität“. Die Reduktion von Mathematik könnte „Struktur“ genannt werden. Diese beiden Begriffe müssen sich nicht gegenseitig ausschließen. Sie können miteinander verbunden werden und voneinander profitieren. Es gibt viele Schnittstellen, die wir in unserem Alltag finden können. Betrachtet man die Natur, so eröffnet sie eine Welt voller Kreativität und Struktur gleichermaßen. Die Natur gilt als ein Vorbild der Kunst. Nach ihrer Perfektion streben viele Künstlerinnen und Künstler – doch ist es ein Ding der Unmöglichkeit, dieses Ziel zur Gänze zu erfüllen. Der Detailreichtum, die Farbenpracht, die Überlegungen, nach der die Natur aufgebaut ist – der Mensch kann nur ein Abbild, eine Kopie dergleichen erschaffen. Doch ist es menschlich nach dem Unmöglichen zu suchen. Weniger unmöglich ist die Mathematik in der Natur. Viele Eigenschaften können durchaus berechnet werden, wie der Goldene Schnitt oder Wachstum und Zerfall von Populationen. Doch auch hier kann nicht alles vorausgesagt werden. Auch wenn alle Faktoren beachtet wurden, kann die Natur jederzeit eine überraschende Wende einnehmen. Ihre Phänomene sind nun mal unberechenbar.

Betrachtet man die Natur und möchte diese graphisch wiedergeben, so kommt oftmals die Geometrie ins Spiel. Sie kann uns helfen, die wichtigsten Informationen mit wenigen Strichen festzuhalten. Das wird vor allem in der Linearperspektive genutzt, aber auch, wenn man das Grundgerüst eines Objekts wie beispielsweise einen Baum untersuchen möchte und dieses dafür in geometrische Grundkörper wie Zylinder und Kugeln zerlegt. Ob geometrische Bilder an sich wie Fraktale oder Ornamente der Kunst zugeordnet werden können, hinterfragt Kuen in ihrer Diplomarbeit (vgl. S. 50). Auf jeden Fall findet man sie häufig in der Architektur oder im Gartenbau. Ein besonders ausgeprägtes Beispiel dafür sind Schlossgärten, deren Aufbau geometrischen Überlegungen folgen. Des Weiteren kann die Geometrie dazu genutzt werden, um Schemata wie Farbräume graphisch darzustellen. Sowohl früher als auch heute noch interessieren und beschäftigen sich Menschen mit Farben, darunter auch der Schriftsteller und Universalgelehrte Goethe. Er widmete ein ganzes Buch der Farbenlehre. Um eine sinnvolle Anordnung der Farben und ihrer Mischungen zu finden, gibt es viele Versuche diese in geometrische Körper wie Pyramiden, Kugeln oder Würfel zu setzen. Der Farbwürfel mit fließenden Übergängen ist dabei ein gutes Anschauungsobjekt (zumindest digital), wenn es um den RGB-Farbraum geht. Dieser kann auch mathematisch definiert werden, indem man jede Farbkombination als Voxel betrachtet und diesem ein Tripel mit den Farbanteilen zuordnet. Die Geometrie findet sich auch im Papierfalten. Origami hat sich im Laufe der Zeit nicht nur zu einer eigenständigen Kunstgattung etabliert. Die Vorteile der verschiedenen Faltungen haben auch eine Anwendung in der Mechanik – besonders in der Raumfahrt – gefunden. Durch platzsparende Falttechniken können große Objekte wie ein Weltraumteleskop auf ein Zehntel ihrer vollständigen Größe zusammengefaltet und ins All transportiert werden. Genauso findet man Falttechniken in Design, Architektur, Medizin und der Mathematik. Denn dieses Thema interessiert Mathematikerinnen und Mathematiker ebenso bezüglich der Frage, welche Faltungen unter welchen Umständen möglich sind. Dazu wurden auch mathematische Sätze formuliert, wie zum Beispiel der *Satz von Kawasaki*, welcher eine Aussage darüber trifft, wann eine Faltung flach zusammengelegt werden kann.

Die wohl bekannteste Schnittstelle zwischen Kunst und Mathematik ist der Goldene Schnitt. Durch Jahrhunderte der Betrachtung, aber auch der Kritik fällt diesem Teilungsverhältnis zwar eine mystische Bedeutung zu, dennoch ist eines sicher: Seiner Arten- und Erscheinungsvielfalt scheinen keine Grenzen gesetzt zu sein. Man findet ihn in der Natur, Architektur, Design, Malerei, anatomischen Studien, Untersuchungen von Populationswachstum, mathematischen Spielereien und sogar der menschlichen DNA. Es gibt unzählige Arten ihn zu berechnen und zu konstruieren.

Eine Idee, zu der ich keine Literatur gefunden hatte, ist die Gegenüberstellung von Kurvendiskussion und Bildanalyse. Beide Analysen folgen einem ähnlichen Schema. Sie untersuchen ein Objekt nach äußeren Eigenschaften und Informationen, die nicht auf den ersten Blick erkennbar sind. Der Versuch, einen Funktionsgraphen mithilfe einer Bildanalyse zu untersuchen und ein Bild als Kurvendiskussion zu betrachten, gelang mir leider nicht. Stattdessen wurden verschiedene Herangehensweisen angeführt, die einen Umweg beschreiten. Das heißt, es wurden folgenden Fragen nachgegangen: Was passiert, wenn man Kunst auf eine mathematische Kurve anwendet? Und was passiert, wenn man Mathematik auf ein Bild anwendet? In diesem Zusammenhang wurde vor allem Computergrafik zum Thema. In der digitalen Bildverarbeitung wird auf die Mathematik zurückgegriffen, um das Bild zum Beispiel nach der Farbzusammensetzung zu untersuchen oder Filter über das Bild zu legen. Umgekehrt können aus Funktionen unterschiedlichen Grades interessante und beeindruckende Bilder entstehen.

Die *Bridges-Konferenz* versucht ebenfalls Brücken zwischen verschiedenen künstlerischen und wissenschaftlichen Disziplinen aufzubauen. All die Ideen, welche dort zusammengetragen werden, entstanden mit den verschiedensten Herangehensweisen. Es ist ein großes Anliegen aller Beteiligten, diese Ideen mit anderen zu teilen und zu erweitern.

Die Fähigkeit, interdisziplinär zu denken und zu arbeiten, bringt viele Vorteile. Nicht nur, dass die Zielgruppe, sondern auch das verknüpfende Denken erweitert wird. Ein Thema aus verschiedenen Blickwinkeln zu betrachten und Informationen aus gleichermaßen wissenschaftlichen wie gestalterischen Bereichen zu sammeln, eröffnet mehr Möglichkeiten zur weiteren Verarbeitung. In der Berufswelt wird das in manchen Feldern vorausgesetzt. Aber diese Fähigkeit muss erlernt werden. Somit sollte schon in der Schule mehr Wert auf fachübergreifendes und fächerverbindendes Arbeiten gelegt werden. Dafür ist eine Kooperation zwischen den Lehrpersonen unerlässlich. Auch wenn solche Projekte für die Lehrpersonen mehr Arbeit in Organisation, Vorbereitung und Durchführung bedeutet, so geschieht dies doch zum Wohl der Kinder und Jugendlichen und letzten Endes der Gesellschaft. Diese stellen sich und den Pädagog*innen oft die Frage „Wofür lernen wir das alles?“ Ein fächerübergreifender Unterricht kann gegebenenfalls darauf eine Antwort geben, wenn das theoretisch Erlernte nicht nur in einem einzigen Fach Verwendung findet. Und genauso zeigt diese Art des Unterrichtens, dass nicht nur die sogenannten Hauptfächer Mathematik, Deutsch und Englisch wichtig sind. Die gestalterischen und musischen Fächer oder die Natur- und Geisteswissenschaften haben durchaus ihre Berechtigung im Schulwesen. Sie sind oftmals nötig für die Umsetzung und Anwendung oder um das Gelernte aus den Hauptfächern zu verstehen. In der Antike gab es nicht umsonst die *Sieben Freien Künste*, auch wenn schon damals dem *Trivium* (bestehend aus Grammatik, Rhetorik und Dialektik) mehr Bedeutung zugesprochen wurde als dem *Quadrivium* (Geometrie, Arithmetik, Musiktheorie und Astronomie) und somit eine Art Hierarchie etabliert wurde (vgl. Kuen 2019, S. 67). Alle Schulfächer sollten gleichwertig sein. Eine Zukunft, bei der es nicht mehr so scharfe Grenzen zwischen den Disziplinen gibt, könnte erstrebenswert sein. Dadurch wird der Blick für das große Ganze ermöglicht. Und diesen Blick brauchen wir, um im Einklang mit unserer Umwelt zu leben. Dieser Blick kann in der Schule begonnen werden, um ihn im Verlauf des Lebens zu schärfen. Somit ist es mir ein großes Anliegen, den fächerverbindenden Unterricht in Zukunft zu unterstützen, was ich mit den in dieser Arbeit ausgeführten Unterrichtsvorschlägen beginnen möchte.

Mathematik und Kunst haben doch mehr gemeinsam, als man anfangs denken würde. Beide Disziplinen sind verknüpft und profitieren voneinander. Die Mathematik kann durchaus die Kreativität der Kunst gebrauchen, um verschiedene Herangehensweisen zu finden. Und die Struktur und Genauigkeit der Mathematik kann in Darstellungsfragen wie der Perspektive herangezogen werden. In diesem Sinne möchte ich diese Arbeit mit einem Zitat Albert Einsteins beenden.

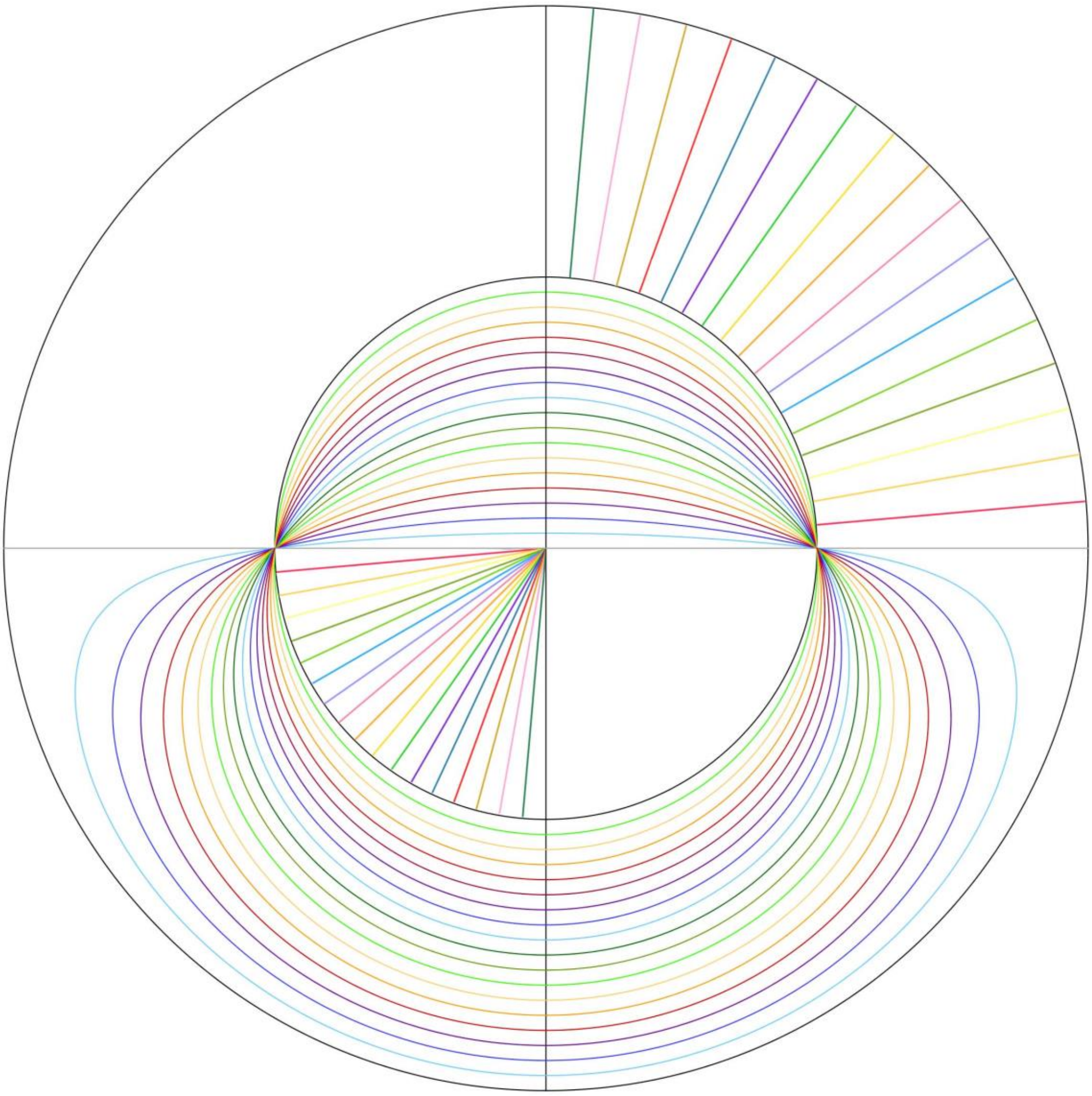
„PHANTASIE IST WICHTIGER ALS WISSEN, DENN WISSEN IST BEGRENZT.“

Anhang

Code

```
import matplotlib.pylab as plt

path = r'C:\Users\Ines\Desktop\napoleon.jpg'

img = plt.imread(path)

img_red = img[:, :, 0]
img_green = img[:, :, 1]
img_blue = img[:, :, 2]

plt.figure()
plt.imshow(img)
plt.title('RGB')
plt.xticks([])
plt.yticks([])
plt.savefig('napoleon_rgb.jpg', dpi=1200, bbox_inches='tight')

plt.figure()
plt.imshow(img_red, cmap='Reds')
plt.title('Rot')
plt.xticks([])
plt.yticks([])
plt.colorbar()
plt.savefig('napoleon_red_dpi1200.jpg', dpi=1200, bbox_in-
ches='tight')

plt.figure()
plt.imshow(img_green, cmap='Greens')
plt.title('Grün')
plt.xticks([])
plt.yticks([])
plt.colorbar()
plt.savefig('napoleon_green_dpi1200.jpg', dpi=1200, bbox_in-
ches='tight')

plt.figure()
plt.imshow(img_blue, cmap='Blues')
plt.title('Blau')
plt.xticks([])
plt.yticks([])
plt.colorbar()
plt.savefig('napoleon_blue_dpi1200.jpg', dpi=1200, bbox_in-
ches='tight')
```

Gitter zu Fisheye-Perspektive



Quellenverzeichnis

Alperin, R. C. & Lang, R. J. (2006): *One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms*. Verfügbar unter: http://www.math.sjsu.edu/~alperin/AlperinLang.pdf [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Araújo, A. (2019): *A Fisheye Gyrograph: Taking Spherical Perspective for a Spin*. Verfügbar unter: https://archive.bridgesmathart.org/2019/bridges2019-659.pdf [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Beckett, W. (2005): *Die Geschichte der Malerei. 8 Jahrhunderte in 455 Meisterwerken*. Köln: Karl Müller Verlag.

Behrends, E. (2018): *Parkettierungen der Ebene. Von Escher über Möbius zu Penrose*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Beutelspacher, A. & Petri, B. (1996): *Der Goldene Schnitt*. 2. Auflage. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Bini, G. & Robutti, O. (2019): *Yo Math Is So Arty: Inspiring Creative Learning with Mathematical Internet Memes*. Verfügbar unter: https://archive.bridgesmathart.org/2019/bridges2019-583.pdf [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Bridges (o.J.): *About Bridges*. Verfügbar unter: http://bridgesmathart.org/about/. [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Brigham Young University (27.11.2013): *Origami in Space: BYU-designed solar arrays inspired by origami* [Video]. Verfügbar unter: https://www.youtube.com/watch?v=3E12uju1vgQ&ab_channel=BrighamYoungUniversity [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Brockhaus (2006): *Kunst*. 21. Auflage, Band 16, S. 93–94. Leipzig: F.A. Brockhaus GmbH.

Brzoska, M. (08.12.2015): *Der Goldene Schnitt: Geheimnisvolle Ordnung der Natur* [Radiosendung]. Bayern 2: radioWissen. Verfügbar unter: https://www.br.de/radio/bayern2/sendungen/radiowissen/mensch-natur-umwelt/goldener-schnitt-102.html [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Butz, T. (2011): *Fouriertransformation für Fußgänger*. 7. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.

Dudenredaktion (Hrsg.) (o.J.):
I: *Universalgenie*. Duden online. Verfügbar unter: https://www.duden.de/rechtschreibung/Universalgenie

II: *Universalgelehrter*. Duden online. Verfügbar unter: https://www.duden.de/rechtschreibung/Universalgelehrter
III: *Polyhistor*. Duden online. Verfügbar unter: https://www.duden.de/rechtschreibung/Polyhistor
IV: *Kunst*. Duden online. Verfügbar unter: https://www.duden.de/rechtschreibung/Kunst
V: *Mathematik*. Duden online. Verfügbar unter: https://www.duden.de/rechtschreibung/Mathematik
[Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Eilenstein, H. (2011): *Kornkreise für Anfänger. Die Entdeckung der Musik der Geometrie*. Norderstedt: Books on Demand.

Ernst, B. (2007): *Der Zauberspiegel des M.C. Escher*. [Erstausgabe 1978, übersetzt von Ilse Wirth]. Köln: Taschen Verlag.

Fathauer, R. (2017): Der Goldene Schnitt. In: *Mathe in 30 Sekunden* [Hrsg. Richard Brown]. Köln: Librero.

Ferro, S. (2018): *A Man-Made Mountain in Finland Serves as an 11,000-Tree Time Capsule*. Verfügbar unter: https://www.mentalfloss.com/article/523882/man-made-mountain-finland-serves-11000-tree-time-capsule [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Freistetter, F. (2016): Die irrationalste aller Zahlen. In: *Spektrum – Die Woche*, November 2016. Verfügbar unter: https://www.spektrum.de/kolumne/die-irrationalste-aller-zahlen/1430636 [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Goethe, J. W. v. (1810): *Zur Farbenlehre* [Hrsg. Guth, K.-M. 2016]. Berlin: Hoffenberg.

Hauskeller, M. (2005): *Was ist Kunst? Positionen der Ästhetik von Platon bis Danto* [8. Auflage]. München: C.H. Beck.

Hoffmann, S. & Trautz, M. (2012): Faltungen und Origami. In: *Architektur & Wissenschaft*. Hrsg.: S. Busse, A. Hamacher. RWTH-Themen, Ausgabe 1, Seiten: 8-13. Aachen: RWTH. Verfügbar unter: https://www.rwth-aachen.de/global/show_document.asp?id=aaaaaaaaaadbnah [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Hull, T. C. (2002): The Combinatorics of Flat Folds: a Survey. In: *The Proceedings of the Third International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education* [Hrsg. AK Peters]. Verfügbar unter: http://origametry.net/papers/flatsurvey.pdf [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Hungerbühler, N. (2013): Origami – von der Kunst und der Wissenschaft des Papierfaltens. In: *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)*, Heft 45, 2013, Seiten 1-14. Version 1 vom 31. Oktober 2013. Verfügbar unter: https://math.ch/norbert.hungerbuehler/publications/OMG_Origami/OMG_article.pdf [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Klingersberger, L. (2014): *Origami Kleid tessellate.it.dress*. Verfügbar unter: https://www.ufg.at/Origami-Kleid-tessellate-it-dress.11272.0.html [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Krause, H. (1998): Ethnomathematik – dargestellt am Beispiel der Sona Geometrie. In: *Spektrum der Wissenschaft*, September 1998, Seiten 118-119. Verfügbar unter: https://www.spektrum.de/magazin/ethnomathematik-dargestellt-am-beispiel-der-sona-geometrie/824837 [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Kuen, L.-M. (2019): *Mathematische Kunst, künstlerische Mathematik. Interdependenzen von Mathematik und Kunst* [Diplomarbeit]. Kunstuniversität Linz.

Küppers, H. L. (2016): *Einführung in die Farbenlehre*. Köln: DuMont Buchverlag.

Lang, R. (2015a): *TREEMAKER*. Verfügbar unter: https://langorigami.com/article/treemaker/ [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Lang, R. (2015b): *EYEGLASS TELESCOPE*. Verfügbar unter: https://langorigami.com/article/eyeglass-telescope/ [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Mason, A. (2009): *Das große Ravensburger Buch der Kunst: Von der Höhlenmalerei bis zur Gegenwart*. Ravensburg: Ravensburger Buchverlag [Orig.: A History of Western Art - From Prehistory to the 21st Century. Florenz: McRae Books 2007].

Montroll, J. (2012): *Origami and Math. Simple to complex*. New York: Antroll Publishing Company.

Nischwitz, A., Fischer, M. & Haberäcker, P. (2007): *Computergrafik und Bildverarbeitung* [2. Auflage]. Wiesbaden: Vieweg Verlag.

Odenwald, M. (2013): *Der Mann, der das Undenkbare sichtbar machte*. Verfügbar unter: https://www.focus.de/wissen/mensch/nobelpreis/tid-23805/chemie-nobelpreistraeger-2011-der-mann-der-das-undenkbare-sichtbar-machte_aid_671723.html [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Petit Pli (2021): *About Petit Pli*. Verfügbar unter: https://shop.petitpli.com/pages/lets-talk-about-us [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Pottmann, H. (2019): *Discrete and Computational Differential Geometry for Functional Pattern Design*. Verfügbar unter: *https://archive.bridgesmathart.org/2019/bridges2019-9.pdf* [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Pringle, H. (2013): Die Geburt der Kreativität. In: *Spektrum der Wissenschaft*, Juni 2013. Seiten 22-29.

Quadbeck-Seeger, H.-J. (2020): *Die DNA-Doppelhelix und der Goldene Schnitt*. Verfügbar unter: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/biuz.202070508 [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Remmert, V. R. (2008): Von dem Gärtner und wie er beschaffen seyn soll: Gartenkunst und mathematische Wissenschaften in der Frühen Neuzeit. In: *Zentrum für Gartenkunst und Landschaftsarchitektur* [Hrsg. J. Wolschke-Bulmahn, A. Koenecke, L. Ludwig]. Tätigkeitsbericht 2005 – 2007, Seiten 57-69. Verfügbar unter: https://www.yumpu.com/de/document/read/5058250/tatigkeitsbericht-2005-2007-des-zentrums-fur-gartenkunst-und- [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Rupprich, H. (1959): *Dürers Stellung zu den agnoetischen und kunstfeindlichen Strömungen seiner Zeit*. München: C.H. Beck. Verfügbar unter: https://www.zobodat.at/pdf/Sitz-Ber-Akad-Muenchen-phil-hist-Kl_1959_0001-0031.pdf [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Schefter, T. (2021): *Zitat zum Thema: Kunst, Künstler*. Verfügbar unter: https://www.aphorismen.de/zitat/4382 [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Sinha, A. (2018): *Edge detection in images using Fourier Transform*. Verfügbar unter: https://akshaysin.github.io/fourier_transform.html [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Thomas, B., Capetillo, A., Díaz de León, A., López, F. & Machado, R. (2019): *A Shape-based Approach to Creativity and Connection Making*. Verfügbar unter: https://archive.bridgesmathart.org/2019/bridges2019-587.pdf [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Tillemans, A. (2003): *Wie Pflanzen den goldenen Winkel berechnen*. Verfügbar unter: https://www.wissenschaft.de/umwelt-natur/wie-pflanzen-den-goldenen-winkel-berechnen/ [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Wade, D. (2017): *Geometrie und Kunst. Der Einfluss antiker Mathematiker auf die Kunst der Renaissance.* Kerkdriel, Niederlande: Librero IBP (Orig.: Geometria. Bath, Somerset: Alexian Limited 2015).

Wagner, J. (2015): *Anwendung der Fouriertransformation in der Bildverarbeitung*. Verfügbar unter: https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/python/FFT_lena.html [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Wikipedia (2021): *Universalgelehrter*. Verfügbar unter: https://de.wikipedia.org/wiki/Universalgelehrter [Zuletzt abgerufen am 15.07.2021].

Wußing, H. (2008): *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton*. Berlin Heidelberg: Springer.

Wußing, H. (2010): *EAGLE-GUIDE. Von Leonardo da Vinci bis Galileo Galilei. Mathematik und Renaissance*. Leipzig: Edition am Gutenbergplatz Leipzig.

Zeising, A. (1854): *Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers*. Leipzig: Rudolph Weigel.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Eigenständigkeitserklärung

„Ich versichere, dass ich die schriftliche Ausarbeitung selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach (inkl. Übersetzungen) anderen Werken entnommen sind, habe ich in jedem einzelnen Fall unter genauer Angabe der Quelle (einschließlich des World Wide Web sowie anderer elektronischer Datensammlungen) deutlich als Entlehnung kenntlich gemacht. Dies gilt auch für angefügte Zeichnungen, bildliche Darstellungen, Skizzen und dergleichen. Ich nehme zur Kenntnis, dass die nachgewiesene Unterlassung der Herkunftsangabe als versuchte Täuschung gewertet wird.“

Datum, Unterschrift